Landskeppni í eðlisfræði 2017

Úrslitakeppni

11. mars kl. 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 4 dæmum sem eru öll í nokkrum liðum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 4 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör. Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi. Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

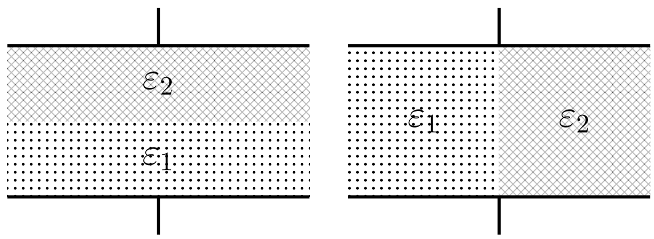
Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Fasti Plancks	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

1 Nokkur dæmi úr rafstöðufræði

Þetta dæmi samanstendur af tveimur óháðum hlutum.

Fyrri hluti — Lagskiptur rafsvari

Myndin að neðan sýnir tvo plötuþétta, þétti V og þétti H með rafsvara á milli platnanna. Flatarmál platnanna er A og bilið á milli þeirra er d. Í báðum þéttunum er rafsvarinn tvískiptur: helmingur efnisins hefur rafsvörunarstuðul $\varepsilon_1 = \kappa_1\varepsilon_0$ og hinn helmingurinn hefur rafsvörunarstuðul $\varepsilon_2 = \kappa_2\varepsilon_0$, þar sem ε_0 er rafsvörunarstuðull tómarúms. Í þétti A er skiptingin lárétt og í þétti B er hún lóðrétt.

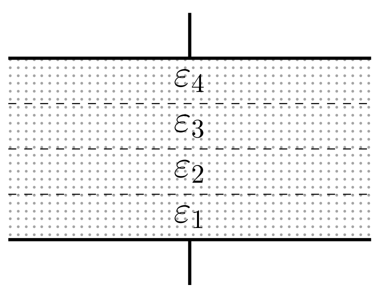


V H

(a) (5 stig) Reiknaðu rýmd þéttanna V og H að ofan, C_V og C_H. Notaðu eingöngu stærðirnar A, d, ε_1 og ε_2 í lokasvarinu.

(b) (3 stig) Ritaðu svarið í (a), en notaðu eingöngu stærðirnar κ_1, κ_2 og C_0 þar sem C_0 er rýmd plötuþéttis án rafsvara sem hefur flatarmál A og bil d milli platnanna.

(c) (3 stig) Hugsum okkur næst plötuþétti með rafsvara sem hefur n ólík lárétt lög þar sem n er heiltala (myndin að neðan sýnir tilfellið $n = 4$). Lögin er öll jafnþykk en þau hafa ólíkan rafsvörunarstuðul. Lag númer i, talið frá neðri plötunni, hefur rafsvörunarstuðul ε_i. Flatarmál platnanna er A og bilið milli þeirra er d. Finndu formúlu fyrir rýmd þéttisins, $C_V^{(n)}$. Notaðu eingöngu stærðirnar A, d og $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ í lokasvarinu.



V

(d) (7 stig) Hugsum okkur plötuþétti með flatarmál A og plötubil d, og rafsvara sem er misleitur. Nánar tiltekið gerum við ráð fyrir að rafsvörunarstuðull efnisins sé háður fjarlægðinni x frá neðri plötunni og sé gefinn með jöfnunni

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0(\kappa_0 + \alpha x) \tag{1}$$

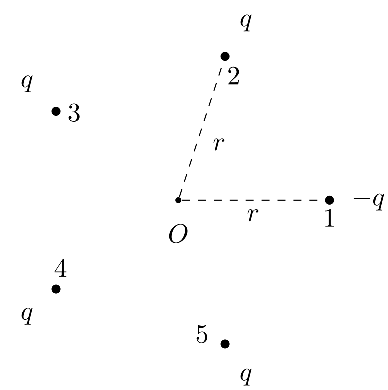
þar sem κ_0 og α eru fastar. Finndu rýmd þéttisins.

Vísbending: Hægt er að nota niðurstöðuna úr (c).

Seinni hluti: Hleðslur á marghyrningi

Ímyndum okkur að við höfum punkthleðslur á sérhverju horni reglulegs n-hyrnings. Fjarlægð hverrar punkthleðslu frá miðpunktinum O er r. Punkthleðslurnar hafa alla hleðslu q nema sú sem stödd er í punktinum $(r,0)$, en hún hefur hleðslu $-q$. Myndin að neðan sýnir tilfellið $n = 5$.

(e) (7 stig) Hvert er heildarrafsviðið frá hleðslunum í miðpunktinum O? Notaðu stærðirnar q og r ásamt eðlisfræðilegum föstum í lokasvarinu.



2 Svífandi blaðra

Gúmmíblaðra sem fyllt hefur verið með helíumgasi svífur upp í heiðskíran himininn þar sem þrýstingur og hitastig falla með hæð. Í spurningunum sem á eftir koma skal gera ráð fyrir að lögun blöðrunnar haldsist hnöttótt og að blaðran leki ekki. Auk þess skal gera ráð fyrir að hitastig helíumgassins innan blöðrunnar sé það sama og andrúmsloftsins sem umlykur hana og gerið ráð fyrir allar gastegundir sem við sögu koma hagi sér eins og *kjörgas*. Gasfastinn er $R = 8.31\text{J/mol}\cdot\text{K}$, mólmassi helíum er $M_H = 4.00 \times 10^{-3}\text{kg/mol}$ og mólmassi andrúmsloftsins er $M_A = 28.9 \times 10^{-3}\text{kg/mol}$. Þyngdarhröðunin er $g = 9.8\text{m/s}^2$.

Fyrri hluti

(a) (7 stig) Látum þrýsting andrúmsloftsins sem umlykur blöðruna vera P og hitastig þess T. Þrýstingur innan blöðrunnar er hærri en sá sem er utan hennar vegna yfirborðsspennu blöðrunnar. Blaðran inniheldur n mól af helíumgasi og þrýstingurinn inni í henni er $P + \Delta P$. Finnið upplyftikraftinn á blöðruna sem fall af P og ΔP.

(b) (9 stig) Einn sumardag í fjarlægu landi reyndist lofthitastigið T í hæð z yfir sjávarmáli vera

$$T(z) = T_0(1 - z/z_0)$$

á bilinu $0 < z < 15\text{km}$ þar sem $z_0 = 49\text{km}$, og $T_0 = 303\text{K}$. Loftþrýstingurinn við sjávarmál reyndist vera $P_0 = 1.0\text{atm} = 1.01 \times 10^5\text{Pa}$ og þéttleiki loftsins $\rho_0 = 1.16\text{kg/m}^3$. Á þessu hæðarbili má lýsa þrýstingnum með jöfnunni

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta.$$

Tjáið η með z_0, ρ_0, P_0 og g og finnið tölulegt gildi þess með tveimur markverðum stöfum. Gerið ráð fyrir að þyngdarhröðunin breytist ekki með hæð.

[*Ábending:* Reiknið $\frac{dP}{dz}$ með því að skoða muninn á þrýstingnum í hæð $z + dz$ og z.]

Seinni hluti

Þegar hnöttótt gúmmíblaðra með geisla r_0 í óteygðu ástandi þenst út þannig að geislinn verður r ($\geq r_0$) safnast fjaðurorka í yfirborð blöðrunnar. Með talsverðum einföldunum má rita fjaðurorkuna við fast hitastig T sem

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa RT(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3) \tag{2}$$

þar sem $\lambda = r/r_0$ og κ er fasti með eininguna mol/m^2.

(c) (9 stig) Tjáið ΔP með stikunum (breytunum) sem koma fram í jöfnu (2).

3 Litli prinsinn

Fyrri hluti

Litli prinsinn eftir Antonie de Saint-Exupéry segir frá litlum prinsi sem býr á smástirninu B-612 langt úti í geimi. Smástirnið líkist að miklu leyti jörðinni okkar. Það er á hringhreyfingu um stjörnu með massa $M_S = 1{,}4 \cdot 10^{29}$ kg og umferðartíminn, T, er sá sami og umferðartími jarðar. Þyngdaraflið við yfirborð smástirnisins er $g = 9{,}8$ m/s^2. Litli prinsinn hefur massa $m = 20$ kg og geisli smástirnisins er $R_B = 1{,}5$ m.

(a) (3 stig) Finndu massa smástirnisins M_B, fjarlægðina til stjörnunnar, r_1, og hraða smástirnisins v_B á braut sinni (í viðmiðunarkerfi stjörnunnar). Notaðu stærðirnar R_B, M_s, T og g ásamt eðlisfræðilegum föstum í lokasvarinu.

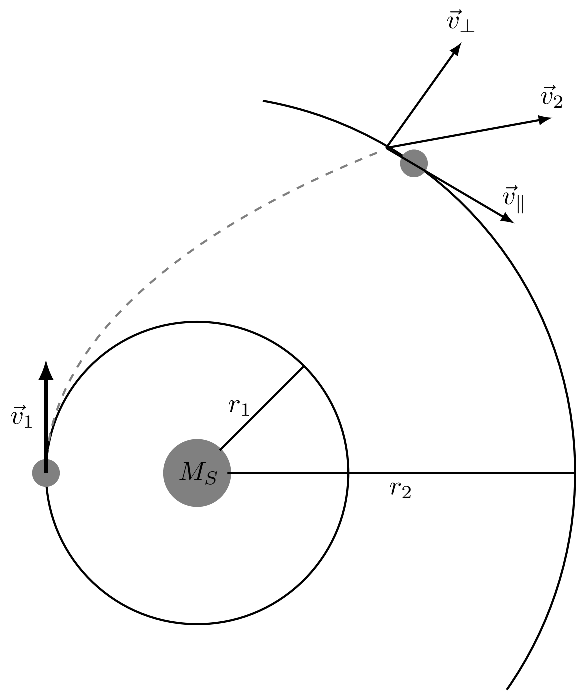
(b) (2 stig) Hver er minnsti hraðinn, v_l sem litli prinsinn þarf til þess að sleppa úr þyngdarsviði smástirnisins? Notaðu stærðirnar M_B og R_B ásamt eðlisfræðilegum föstum í lokasvarinu. Reiknið auk þess tölulegt gildi v_l.

(c) (3 stig) Prinsinn telur að smástirnið hans sé eini fylgihnöttur stjörnunnar í þessu sólkerfi. Að því gefnu, hver er minnsti hraðinn, v_{esc}, miðað við viðmiðunarkerfi smástirnisins, sem hann þarf til þess að sleppa úr sólkerfinu? Notaðu stærðina v_B ásamt eðlisfræðilegum föstum í lokasvarinu. Reiknið auk þess tölulegt gildi v_{esc}.

Ath: Ef þér tókst ekki að leysa lið 1 máttu nota $M_B = 2.7{\cdot}10^{11}$ kg, $r_1 = 7.3{\cdot}10^{10}$ m og $v_B = 14.000$ m/s.

Seinni hluti

Nú reynist vera önnur pláneta í sólkerfinu, C-325, sem er einnig á hringhreyfingu umhverfis stjörnuna í sama plani og smástirnið B-612. Plánetan hefur massann $M_C = 1{,}1 \cdot 10^{14}$ kg og er í fjarlægðinni $r_2 = 5r_1$ frá stjörnunni. Látum $k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{5}$. Litli prinsinn ætlar að nota þyngdaraflsslöngvun (gravitational slingshot) til þess að sleppa úr sólkerfinu. Aðferðin byggir á því að nýta sér varðveislu hverfiþungans til þess að breyta stefnunni og auka hraðann þegar prinsinn fer framhjá plánetunni C-325. Í næstu liðum ákvörðum við minnsta hraðann sem prinsinn þarf að hafa miðað við smástirnið sitt svo að hann sleppi út úr sólkerfinu með þessum hætti. Prinsinn stekkur frá smástirninu sínu með hraðann $\vec{v}_1$ samsíða hreyfingarstefnu smástirnisins í viðmiðunarkerfi stjörnunnar. Hreyfing prinsins í sólkerfinu er sýnd á mynd fyrir neðan.



Gerum ráð fyrir að hraðinn $\vec{v}_1$ sé nógu stór til þess að prinsinn komist í fjarlægð r_2 frá stjörnunni. Í þessari fjarlægð má hunsa þyngdarkraftinn frá smástirninu B-612 þar sem hann er mun smærri en þyngdarkrafturinn frá stjörnunni. Við gerum einnig þá nálgun að það megi hunsa þyngdarkraftinn frá plánetunni C-325 þar til prinsinn er kominn mjög nálægt henni.

Látum $\vec{v}_2$ vera hraða prinsins þegar hann er kominn í fjarlægð r_2 frá stjörnunni en áður en þyngdarkrafts C-325 fer að gæta. Látum $v_\parallel$ vera hraðaþátt $\vec{v}_2$ samsíða hreyfingarstefnu C-325 og $v_\perp$ vera hraðaþáttinn hornrétt á hreyfingarstefnu C-325.

(d) (2 stig) Finndu jöfnu fyrir $v_\parallel$ sem fall af k og v_1 með því að nota hverfiþungavarðveislu.

(e) (5 stig) Finndu jöfnu fyrir $v_\perp^2$ sem fall af k, v_1 og v_B með því að nota orkuvarðveislu.

Eftir að prinsinn hefur farið framhjá plánetunni C-325 (nógu langt til þess að við getum hunsað þyngdarkraftinn frá C-325) þá hefur hann hraðann $\vec{v}_3$ í viðmiðunarkerfi stjörnunnar, sem er samsíða hraða C-325. Látum v_3' vera hraða prinsins í viðmiðunarkerfi C-325.

(f) (5 stig) Finndu hraðann v_3' sem fall af v_1, v_B og k.

Vísbending: Hægt er að líta á ferlið þegar prinsinn kemur inn í þyngdarsvið plánetunnar C-325 og tekur fram úr henni sem alfjaðrandi árekstur. Byrjaðu á því að finna hraða C-325 sem fall af v_B og k.

(g) (5 stig) Finndu upphafshraðann v_1' sem prinsinn þarf að fá miðað við smástirnið B-612 til þess að sleppa úr sólkerfinu ef hann notar þyngdaraflsslöngvun eins og lýst var að ofan.

4 Kastferill bolta

Bolta er kastað undir horninu α miðað við lárétt úr punkti A. Gera má ráð fyrir að $0 < \alpha < 90°$. Við látum θ vera hornið sem línustrikið frá einhverjum punkti á kastferlinum yfir í punkt A myndar við lárétt. Jafnframt látum við ϕ vera hornið sem hraði boltans á hverjum tímapunkti myndar við lárétt (hér er $\phi \geq 0$ fyrir fyrri helming kastferilsins en $\phi \leq 0$ fyrir seinni helminginn).

Látum B vera punktinn á kastferlinum þannig að $\theta = \frac{1}{2}\alpha$ og látum C vera punktinn á kastferlinum þannig að $\phi = -\frac{1}{2}\alpha$.

1) (8 stig) Sýndu að í sérhverjum punkti kastferilisins gildir eftirfarandi jafna:

$$2\tan\theta = \tan\alpha + \tan\phi \tag{3}$$

2) (8 stig) Sýndu að ef B og C er sami punkturinn þá er $\alpha = 60°$.

Vísbending: Hér má nota eftirfarandi hornafallajöfnu án sönnunar:

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{1}{2}\alpha}{1-\tan^2\frac{1}{2}\alpha} \tag{4}$$

3) (9 stig) Gefum okkur nú að $\alpha < 60°$. Ákvarðaðu hvort boltinn komist fyrst í punkt B eða punkt C. Þú mátt að sjálfsögðu nota vísbendinguna úr 2 aftur.