a) Bíll keyrir fram af klettabrún á $50m/s$. Klettabrúnin er $100m$ á hæð. Hversu langt frá brúninni í lárétta stefnu mun bíllinn lenda?

Lausn: Bíllinn hefur engan lóðréttan hraða í upphafi og er í hæð $100m$. Ef það tekur hann t_0 sek að falla $100m$ gildir

$$0 = 100 - \frac{1}{2}gt_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{200/g} \approx 4.51\text{sek}$$

Því mun hann lenda $s_x(t_0) = 50 \cdot \sqrt{200/g} \approx 225.7m$ frá klettabrúninni.

b) Nú er stór gormur staðsettur þar sem bíllin mun lenda Ef gert er ráð fyrir því að engin orka tapist þegar bíllinn lendir á gorminum, hvar mun bíllinn þá lenda eftir að hann skoppar af gorminum?

Lausn: Þegar bíllinn skoppar á gorminum snýst lóðrétti hraði hans við. Hreyfiorka hans rétt eftir að hafa skoppað af gorminum verður sú sama og stöðuorka hans þegar hann var upp á klettabrúninni. Því mun bíllinn ferðast upp í $100m$ aftur og falla svo til jarðar og vera þá kominn $s_x(t_0) + 2 \cdot s_x(t_0) = 677.3m$ frá klettabrúninni.

c) Bíllinn var illa hannaður og er því ekki mjög straumlínulagaður. Hann er svo skrýtin í laginu að gera má ráð fyrir að öll loftmótstaðan sem verkar á bílin sé í lárétta stefnu og megi lýsa með $\mathbf{F}_{mot} = -\gamma \begin{bmatrix} v_x^2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Hversu langt frá gorminum sem var staðsettur í a-lið mun bílinn lenda í raun og veru þegar tekið er tillit til loftmótstöðu? G.r.f. að massi bílsins sé $m = 1000kg$ og $\gamma = 2.5$

Lausn: Finnum hraða bílsins í lárétta stefnu sem fall af tíma $v_x(t)$. Hann uppfyllir jöfnuna:

$$\begin{aligned} mv_x' = -\gamma v_x^2 &\iff \frac{v_x'}{v_x^2} = -\frac{\gamma}{m} \\ &\iff \int \frac{1}{v_x^2} dv_x = -\int \frac{\gamma}{m} dt \\ &\iff -\frac{1}{v_x} = -\frac{\gamma}{m}t + C \end{aligned}$$

Nú er $v_x(0) = 50$ svo við getum leys fyrir óþekkta fastann C:

$$-\frac{1}{50} = -\frac{\gamma}{m} \cdot 0 + C$$

þ.a. $C = -1/50$ og hraðinn því

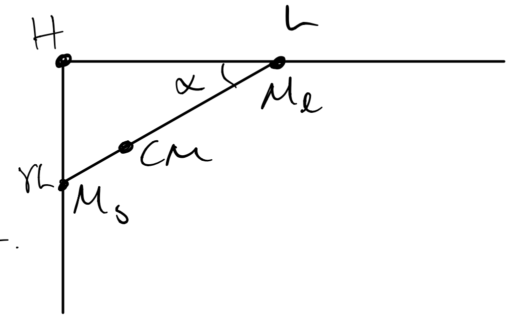
$$v_x = \frac{1}{\frac{\gamma}{m}t + 1/50} = \frac{50m}{50\gamma t + m}$$

Við getum nú fundið stöðu bíllsins sem fall af tíma

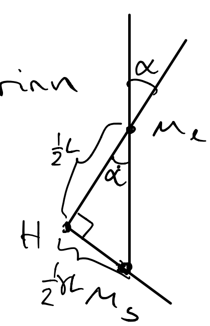
$$s_x(t) = \int_0^t v_x(r)dr = \left[\frac{m}{\gamma}\ln(50\gamma r + m)\right]_0^t = \frac{m}{\gamma}(\ln(50\gamma t + m) - \ln(m)).$$

Það mun taka bílinn sama tíma að falla til jarðar og í a-lið svo hann mun lenda á jörðinni í $s_x(4.51) = \frac{m}{\gamma}(\ln(50\gamma 4.51 + m) - \ln(m)) = 178.8m$ sem er $225.7 - 178.8 = 46.9m$ frá gorminum.

(a) Látum CM tákna massamiðju Ellsins. Látum m vera massa lengri spýtunnar. Þá er γm massi styttri spýtunnar.

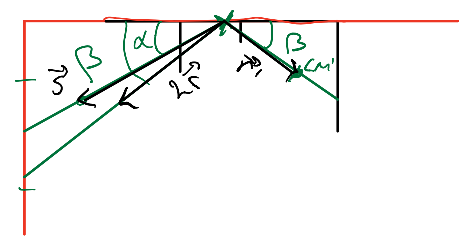


Nú er CM massamiðja punktmassa m í M_ℓ, miðpunkti lengri spýtunnar og punktmassa γm í M_s, miðpunkti styttri spýtunnar. Massamiðja kerfis sem samanstendur af tveim punktmössum liggur á strikinu milli punktmassanna, en það er það eina sem við þurfum að vita, því þegar Ellið er hengt upp á hangir massamiðjan beint fyrir neðan punktinn sem spottinn er hengdur í. Því er $\alpha = \angle H M_\ell M_c$ (sjá mynd) þar sem H er punkturinn sem spýturnar eru límdar saman í. Höfum því



$$\alpha = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\gamma L}{\frac{1}{2}L}\right) = \arctan(\gamma)$$

(b) Leggjum Ellið ðendanlega í hnitakerfi með löngu spýtuna samsíða x-ás og miðpkt. hennar í upphafspunkt hnitakerfisins. Látum m_L vera massa Ellsins (endanlega). Ath. að Ellið óendanlega hefur massa $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} m_L = 2m_L$. Látum $2\vec{r} = 2\binom{r_x}{r_y}$ vera vigurinn frá upphafspunkti hnitakerfisins að massamiðju Ellsins óendanlega, látum $\vec{s} = \binom{s_x}{s_y} = \binom{s_x}{\gamma s_x}$ vera vigurinn frá $(0,0)$ að massamiðju Ellsins (endanlega) (rauða hlutans á myndinni) og $\vec{r}'$ vera vigurinn frá $(0,0)$ að massamiðju Ellsins óendanlega að rauða hlutanum frátöldum. Athugum að það kerfi er nákvæmt afrit af Ellinu óendanlega, nema skalað niður um helming og allt speglað um y-ás. Því er $\vec{r}' = \binom{-r_x}{r_y}$. Nú gildir $2\vec{r} = \dfrac{m_L \vec{r}' + m_L \vec{s}}{2m_L}$



þ.e. $2\binom{r_x}{r_y} = \frac{1}{2}\binom{-r_x + s_x}{r_y + s_y}$ þ.e. $\begin{pmatrix}\frac{5}{2} r_x \\ \frac{3}{2} r_y\end{pmatrix} = \binom{s_x}{s_y} = \binom{s_x}{\gamma s_x}$

þ.e. $\binom{r_x}{r_y} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} s_x \\ \frac{2}{3}\gamma s_x\end{pmatrix}$

so $\beta = \arctan\left(\frac{2r_y}{2r_x}\right) = \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{2}{3}\gamma s_x}{\frac{2}{5}s_x}\right) = \underline{\underline{\arctan\left(\frac{5}{3}\gamma\right)}}$

Kústskaft

Hjalti Þór og Sigurður Jens

3. mars 2018

Skoðum kústskaft með einsleita massadreifingu af lengd L og massa M. Gerum ráð fyrir að þykkt þess sé óveruleg og það standi lóðréttu jafnvægi á sléttum fleti. Byssu er haldið í hæð x yfir miðju skaftsins, beint lárétt að skaftinu og svo hleypt af. Gerið ráð fyrir að byssukúlan fái hraða v, hafi massa m og fjarlægð hlaupsins frá skaftinu sé óveruleg, svo gera má ráð fyrir að hraða kúlunnar breytist ekki á leiðinni frá hlaupinu að skaftinu.

(a) Finnið x sem fall af L, M, m og v þ.a. neðsti punktur skaftsins verði kyrrstæður rétt eftir áreksturinn.

[*Ábending:* Munið *reglu Steiners* þ.e. $I = I_{cm} + md^2$, þar sem I_{cm} er hverfitregða um massamiðju, d fjarlægð frá massamiðju og m massi hlutarins.]

Lausn. Köllum hæð nýju massamiðjunnar fyrir ofan miðju y. Höfum að $(M+m)y = M\cdot 0 + m\cdot x$ þ.e. $y = \frac{mx}{M+m}$. Hverfitregða stangar um massamiðju er $I_{cm} = \frac{1}{12}L^2M$ svo skv. reglu Steiners er hverfitregða stangarinnar um nýju massamiðjuna ásamt kúlunni gefin með

$$\begin{aligned} I = I_{cm} + My^2 + m(x-y)^2 &= I_{cm} + M\left(\frac{mx}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{Mx}{M+m}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}L^2M + \frac{(Mm^2 + M^2m)x^2}{(M+m)^2} \\ &= M\left(\frac{1}{12}L^2 + \frac{mx^2}{M+m}\right) \end{aligned}$$

Köllum hornhraðann beint eftir áreksturinn um massamiðju, ω. Þá gefur varðveislulögmál hverfiþunga að

$$mv(x-y) = I\omega$$

þ.e.

$$mv\frac{Mx}{M+m} = I\omega$$

þ.e.

$$\omega = \frac{Mmxv}{(M+m)I}.$$

Köllum hraða massamiðjunnar eftir áreksturinn v'. Skriðþungavarðveisla gefur

$$mv = (M+m)v'$$

þ.e.

$$v' = \frac{mv}{M+m}.$$

Nú er hraða neðsta punktar m.v. massamiðju jafn $(y + L/2)\omega$ og þar eð hann á að vera kyrrstæður þarf hann að styttast á móti hraða massamiðjunnar. Höfum því

$$\left(y + \frac{L}{2}\right)\omega = v'.$$

Stingum inn í og fáum

$$\left(y + \frac{L}{2}\right)\frac{Mmxv}{(M+m)I} = \frac{mv}{M+m}$$

þ.e.

$$\left(y + \frac{L}{2}\right)Mx = I = M\left(\frac{1}{12}L^2 + \frac{mx^2}{M+m}\right)$$

sem gefur

$$\left(\frac{mx}{M+m} + \frac{L}{2}\right)x = \frac{1}{12}L^2 + \frac{mx^2}{M+m}$$

sem gefur

$$\frac{Lx}{2} = \frac{1}{12}L^2$$

þ.e.

$$x = \frac{1}{6}L.$$

(b) Gerum nú ráð fyrir að $m \ll M$. Sýnið að með góðri nálgun þá þurfi

$$v \geq \frac{M^2L^{3/2}\sqrt{2g}}{m^2x}$$

að gilda til að skaftið lyftist frá undirlaginu. [Eins og vanalega er g þyngdarfastinn.]

Lausn. Þar eð $m \ll M$ má gera ráð fyrir að hverfitregða og massamiðja kústskaftins breytist ekki þótt byssukúlan festist í því. Fáum því skv. varðveislulögmáli hverfitregðu að

$$I_{cm}\omega = \frac{mx}{M+m}vm \approx \frac{m^2x}{M}v$$

þ.e.

$$v \approx I_{cm}\omega\frac{M}{m^2x} = \frac{M^2L^2}{12m^2x}\omega$$

Hröðun neðsta punktar inn að massamiðju rétt eftir áreksturinn er beint upp og að stærð

$$\frac{L}{2}\omega^2$$

Viljum að hún sé $\geq g$. Fáum því

$$\omega \geq \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

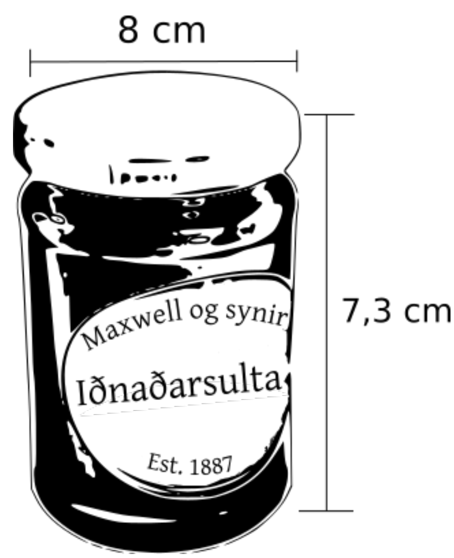
Því fæst

$$v \geq \frac{M^2L^2}{12m^2x}\sqrt{\frac{2g}{L}} = \frac{M^2L^{3/2}\sqrt{2g}}{m^2x}$$

3 Hvers vegna er svona erfitt að opna sultukrukkur?

(a) (10 stig) Þegar sulta er sett í krukkur er hitastig hennar 85,0 °C. Gerum ráð fyrir að sultan breyti ekki um rúmmál vegna breytinga í þrýstingi eða hita. Lokið er skrúfað á krukkuna þar sem loftið er við sama hitastig og sultan en er við venjulegan loftþrýsting, þ.e. 1 atm = 101 325 Pa. Þvermál loksins á krukkunni er 8,00 cm, sjá mynd 2 (ekki í réttum hlutföllum). Hve mikill kraftur verkar á lok sultunnar vegna þrýstings þegar sultan hefur kólnað niður í 20,0 °C?

(b) (15 stig) Nú skulum við reikna með rúmmálsbreytingu vegna hitastigsbreytingar. Rúmmálsbreyting sultunnar fylgir jöfnunni $\Delta V = \beta V_0 \Delta T$ þar sem V_0 er rúmmál sultunnar við ákveðið hitastig, ΔT er breyting á hitastigi og β er ákveðinn fasti. β er í rauninni sterklega háð hitastigi en í þessu dæmi segjum við að það sé alltaf $\beta = 1{,}385 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$. Hundsið rúmmálsbreytingu krukkunnar sjálfrar. Við stofuhita er rúmmál sultunnar 0,333 L og við getum sagt að sultukrukkan sé sívalningur með hæð 7,30 cm. Reiknið aftur hve mikill kraftur verkar á lokið vegna þrýstings. Sem áður breytir sultan ekki um rúmmál vegna breytinga í þrýstingi.



Mynd 2: Sultukrukkan sem um ræðir

Lausn:

(a) Við höfum $P_1 = 1\,\mathrm{atm}$, $T_1 = 85{,}0\,\mathrm{K} + 273{,}15\,\mathrm{K} = 358{,}15\,\mathrm{K}$ og $T_2 = 20{,}0\,\mathrm{K} + 293{,}15\,\mathrm{K} = 293{,}15\,\mathrm{K}$. Nú er rúmmál og fjöldi agna viðkomandi lofts ekki breytilegt svo kjörgasjafnan tekur formið

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow P_2 = \frac{P_1 T_2}{T_1} \tag{1}$$

Þrýstingsmunurinn milli krukkunnar og andrúmsloftsins er þá

$$\Delta P = 1\,\mathrm{atm} - P_2 \tag{2}$$

Nú er radíus loksins $r = 4{,}00cm$. Krafturinn sem verkar á lokið vegna þrýstings er þá

$$\pi r^2 \Delta P = 92{,}7\,\mathrm{K} \tag{3}$$

Svarið 92,5 fæst ef í millireikningum eru ekki notaðir aukastafirnir fyrir breytinguna úr Celsíus í Kelvin.

(b) Við $85\,°\mathrm{C}$ tekur sultan upp rúmmálið

$$V_1 = 0{,}333\,\mathrm{L} + 0{,}333\,\mathrm{L}\beta \cdot 65\,\mathrm{K} = 0{,}335\,998\,\mathrm{L} \tag{4}$$

Þá náði sultan upp að hæðinni

$$h = \frac{V_1}{\pi r^2} = 6{,}684\,\mathrm{cm} \tag{5}$$

Fyrir kólnunina var rúmmál loftsins í krukkunni

$$V_1' = \pi r^2 (7{,}30\,\mathrm{cm} - h) = 3{,}0964 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 = 3{,}0964 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{L} \tag{6}$$

Og eftir kólnunina var rúmál loftsins

$$V_2' = V_1' + V_2 - V_1 = 3{,}3962 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{L} \tag{7}$$

Köllum þrýsting loftsins fyrir og eftir kólnunina P_1' og P_2', í sömu röð. Við getum núna notað kjörgasjöfnuna til að finna P_2'.

$$\frac{P_1' V_1'}{T_1'} = \frac{P_2' V_2'}{T_2'} \tag{8}$$

$$P_2' = \frac{P_1' V_1' T_2'}{V_2' T_1'} = 0{,}746\,256\,\mathrm{atm} \tag{9}$$

$$F = (1\,\mathrm{atm} - P_2')\pi r^2 = 129\,\mathrm{N} \tag{10}$$

Dæmi 5 á eðlisfræðikeppni framhaldsskólanna

(a) Við höfum jöfnuhneppi með 3 óþekktum stærðum:

$$\begin{cases} I_1 = -(I_2 + I_3) \\ V_1 = I_2 R_2 - I_1 R_1 \\ V_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 \end{cases}$$

Við leysum síðan jöfnuhneppið. Athugum að fyrsta jafnan er jafngild $I_3 = -(I_1 + I_2)$. Stingum fyrstu jöfnunni inn í þá þriðju og fáum því jöfnuhneppi með tveimur óþekktum stærðum:

$$\begin{cases} V_1 = I_2 R_2 - I_1 R_1 \\ V_2 = I_2 R_2 + (I_1 + I_2) R_3 \end{cases}$$

Margar leiðir eru til þess að leysa jöfnuhneppi með tveimur óþekktum stærðum og lausn þessa jöfnuhneppis er

$$I_1 = \frac{R_2 V_2 - (R_2 + R_3) V_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad I_2 = \frac{R_1 V_2 + R_3 V_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, \quad I_3 = -(I_1 + I_2)$$

(b) Við látum $r = \sqrt{z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ og fáum:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{kq_1}{r^2} \begin{pmatrix} \frac{d/2}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} + \frac{kq_2}{r^2} \begin{pmatrix} -\frac{d/2}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} = \frac{k}{r^3} \begin{pmatrix} \frac{d}{2}(q_1 - q_2) \\ z(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

(c) Þegar $q_1 = q_2$ þá er $E_x = 0$ og við höfum:

$$E_y = \frac{2kqz}{\left(z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}}$$

og ef $d \ll z$ þá

$$E_y \approx \frac{2kq}{z^2}$$

(d) Þegar $q = q_1 = -q_2$ þá höfum við $E_y = 0$ en:

$$E_x = \frac{kqd}{\left(z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Við notum síðan nálgunina $(1+b)^n \approx 1 + nb$ ef $b \ll 1$ því $\frac{d}{z} \ll 1$ ef $d \ll z$. Fáum því:

$$E_y = \frac{kqd}{z^3} \left(1 + \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^{-3/2} \approx \frac{kqd}{z^3} \left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)$$

en við getum hunsað d^2-liði svo að við fáum:

$$E_y \approx \frac{kqd}{z^3} \, (\approx 0)$$

(e) Við getum litið á þessa hleðsludreifingu sem samlagningu á heilli kúlu með hleðsludreifingu ρ og geisla R og kúlu með andstæða hleðsludreifingu með geisla b. Frá lögmáli Gauss er rafsviðið í punkti $\boldsymbol{r}$ í stóru kúlunni vegna stóru kúlunnar $\frac{4}{3}\pi k \rho \boldsymbol{r}$ þar sem k er vitaskuld Coulomb fastinn. Rafsviðið í punkti $\boldsymbol{r}$ í litlu kúlunni vegna litlu kúlunnar er $-\frac{4}{3}\pi k \rho (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d})$. Ef við leggjum þessi svið saman fáum við rafsviðið $\boldsymbol{E} = \frac{4}{3}\pi k \rho (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} + \boldsymbol{d}) = \frac{4}{3}\pi k \rho \boldsymbol{d}$.