Landskeppni í eðlisfræði 2013

Úrslitakeppni

Laugardaginn 16. mars 2013, kl. 09:00 - 12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 5 dæmum sem eru öll í nokkrum liðum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 5 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

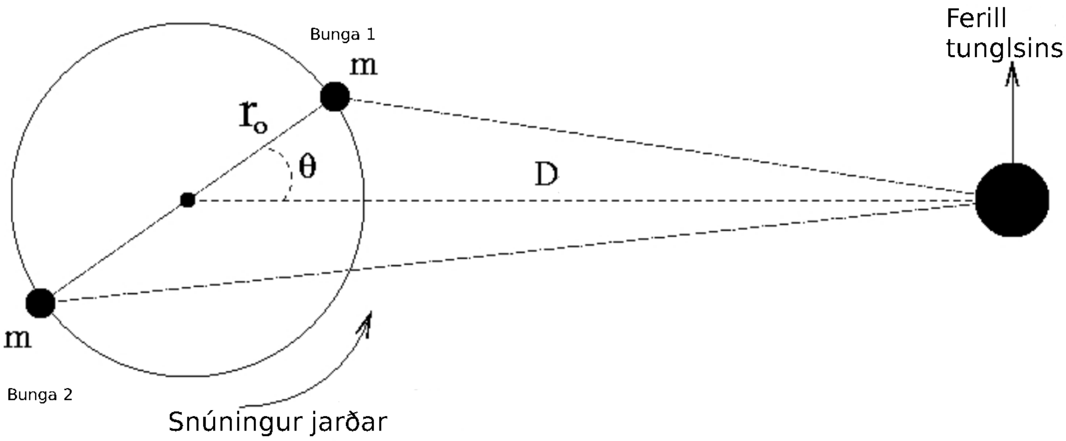
Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3,00 \cdot 10^{8}$ m/s
Þyngdarhröðun jarðar	g	$9,82$ m/s^2
Massi rafeindar	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
Grunnhleðslan	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
Þyngdarfastinn	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg·s^2)
Radíus sólar	$R_\odot$	$6,955 \cdot 10^{8}$ m
Massi sólar	$M_\odot$	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg
Massi jarðar	M_j	$5,97 \cdot 10^{24}$ kg
Massi tungls	M_t	$7.34 \cdot 10^{22}$ kg
Fjarlægð tungls og jarðar	D	$3.84 \cdot 10^{8}$ m
Stjarnfræðieining	$1\ AU$	$1,50 \cdot 10^{11}$ m

Dæmi 1 - Flóðkraftar

Tunglið okkar er hlutfallslega næststærsta tungl sólkerfisins. Sjávarföllin, flóð og fjara, eru að mestu leyti til komin vegna flóðkrafta frá tunglinu. Í þessu dæmi er stillt fram einföldu líkani af sjávarföllunum þar sem við gerum ráð fyrir eftirfarandi

- Jörð (massi M_J) og tungl (massi M_t) eru bæði punktmassar (sjá mynd að neðan, með skilgreiningu á fleiri þekktum stærðum)
- Sjávarbungur sem valda flóði megi nálga sem punktmassa, m
- Sólin hafi engin áhrif



Gagnlegar reglur við lausn dæmisins

$$\text{Cosinusreglan:} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

$$\text{Sinusreglan:} \quad \frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Athugið: Einungis þarf að nota reiknivél í síðasta liðnum.

a) (6) Finnið kraftana F_1, þyngarkraft frá tunglinu á bungu 1, og F_2, þyngdarkraft frá tunglinu á bungu 2, sem föll af þekktum stærðum.

b) (6) Finnið vægin τ_1, vægið á jörðina sökum bungu 1 og τ_2, vægið á jörðina sökum bungu 2, sem föll af þekktum stærðum.

c) (2) Táknið nú heildarvægið sem verkar á jörðina, τ, sökum bunganna tveggja sem fall af þekktum stærðum.

Nú höfum við almenna jöfnu sem lýsir heildarvæginu á jörðina sökum flóðkrafta frá tunglinu sem er meðal annars fall af θ. Nú er gefið að fyrir $\theta = 3°$ gefur jafnan í c) lið heildarvægið $\tau = 4 \cdot 10^{16}$Nm - óþarfi að stimpla inn í reiknivél sjálf.

d) (6) Notið gildið að ofan fyrir τ til að finna hversu mikið tunglið fjarlægist jörðina á ári.
Ábending: Finnið hverfiþunga tunglsins L og notið $\frac{dL}{dt} = \tau$

Dæmi 2 - Árekstur tveggja agna

Ögn 1 með massann m ferðast upphaflega með jöfnum hraða í x-stefnu með skriðþunga $\mathbf{p}_0$. Ögnin rekst á aðra ögn, ögn 2, sem er upphaflega kyrrstæð og hefur massa M. Eftir áreksturinn ferðast báðar agnirnar í $x-y$ planinu með jöfnum hraða. Skriðþungi agnar 1 eftir áreksturinn er $\mathbf{p}_1$ með þáttunum p_{1x} í x-stefnu og p_{1y} í y-stefnu. Látum p_0 tákna lengd vigursins $\mathbf{p}_0$.

a) (3) Finndu K_1, skriðorku agnar 1 eftir árekstur og K_2, skriðorku agnar 2 eftir árekstur. Skrifaðu svörin sem föll af stærðum gefnum í dæminu og/eða þekktum föstum.

b) (7) Látum $Q = K_f - K_e$, þar sem K_f er heildarskriðorka kerfisins fyrir árekstur og K_e er heildarskriðorka kerfisins eftir árekstur. Sýndu að unnt er að skrifa Q á forminu

$$Q = A(Bp_0^2 - (p_{1x} - Cp_0)^2 - p_{1y}^2)$$

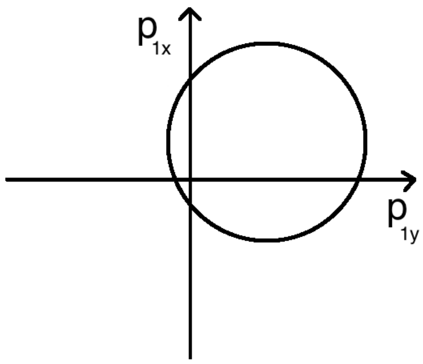
og finndu A, B og C sem fall af m, M og/eða þekktum föstum.

c) (2) Hvaða gildi tekur Q ef áreksturinn er alfjaðrandi?

Gerðu hér eftir ráð fyrir að p_0 taki fast gildi og $M > m$.

d) (4) Finndu stærsta gildi sem p_{1x} getur tekið, sem fall af stærðum gefnum í dæminu og/eða þekktum föstum.

e) (2) Gerðu áfram ráð fyrir að $M > m$. Sjá má út frá jöfnunni í b) lið að graf með p_{1x} sem fall af p_{1y}, fyrir alfjaðrandi árekstur, er hringur, eins og sést á myndinni að neðan. Ekki er víst að hringurinn á myndinni að neðan sé rétt staðsettur í hnitakerfinu. Rissaðu myndina upp og merktu inn á hana punktinn sem fékkst í d) lið, þ.e. þegar p_{1x} tekur stærsta gildi sitt. Passaðu að staðsetja hringinn rétt í hnitakerfinu miðað við þennan punkt (en radíus hringsins þarf ekki að vera nákvæmt reiknaður).



f) (2) Merktu skýrt inn á rissmynd af grafinu í e) lið möguleg gildi á $\mathbf{p}_1$ fyrir *ófjaðrandi* árekstur.

Dæmi 3 - Geislun

Í þessu dæmi eru tveir óháðir liðir. Sá fyrri fjallar um hrörnun og vegur 70% af vægi dæmisins. Sá seinni fjallar um svarthlutageislun og vegur 30%.

Úran-238, U_{92}^{238}, hrörnar í nokkrum skrefum í stöðuga samsætu blýs. Eitt af efnunum sem U_{92}^{238} hrörnar í er radíum-226, Ra_{88}^{226}. Helmingunartími Ra_{88}^{226} er 1602 ár. Helmingunartími Ra_{88}^{226} er miklu styttri en helmingunartími U_{92}^{238} svo gera má ráð fyrir að í gömlum sýnum ríki jafnvægi þannig að hlutföll efnanna haldist stöðug. Í tilteknu (gömlu) sýni af U_{92}^{238} mælast $0,340\mu g$ af Ra_{88}^{226} fyrir hver $1,00g$ af U_{92}^{238}. Athugið að $1u = 1,660 \cdot 10^{-27}kg$.

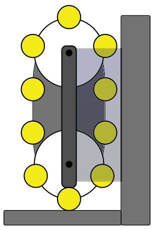
a)(14) Reiknið helmingunartíma U_{92}^{238}.

Um svarthlut með yfirborðsflatarmál A og við hitastig T gildir að hann geislar frá sér aflinu $P = \sigma AT^4, \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2 \cdot K^4}$. Svarthlutir gleypa alla rafsegulgeislun sem lendir á þeim og allt yfirborð þeirra er jafn heitt. Gerum ráð fyrir að jörðin hegði sér eins og svarthlutur nema hvað, öfugt við svarthluti, speglar hún föstu hlutfalli ljóssins sem lendir á henni til baka þ.a. að hitastig hennar sé $T = 288K$ (meðalhiti yfirborðs jarðar).

b)(6) Hvert yrði meðalhitastigið, T', ef fjarlægðin milli jarðar og sólu væri minnkuð um 1% (gerið ráð fyrir að hlutfall endurspeglaðs ljóss breytist ekki)?

Dæmi 4 - Eilífðarvél

Hér að neðan má sjá hugmynd að eilífðarvél. Massar eru tengdir með reipi í hring. Þeir massar sem eru í vatni verða fyrir uppdrifskrafti sem á að knýja snúningshreyfingu allra massanna. Í þessu dæmi skoðum við af hverju vélin virkar ekki.



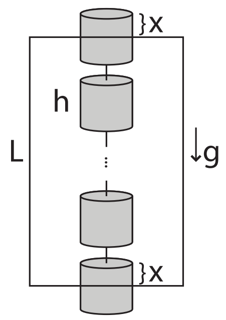
Í öllum liðum þessa dæmis má hunsa núningskrafta sem hlutur verður fyrir þegar hann hreyfist í vatni.

(a) (3) Látum P_0 vera þrýsting andrúmslofts, ρ vera eðlismassa vatns og $P(z)$ vera þrýsting í vatni á dýpi z. Sýnið að
$$P(z) = P_0 + \rho gz.$$
Ábending: Skoðið kraftana sem verka á vatnssúlu með toppflöt við yfirborð vatnsins og botnflöt á dýpi z.

(b) (3) Sívalningslaga hlutur með botnflöt S og hæð h er á kafi í vatni. Notið (a) til að sýna að uppdrifskrafturinn sem verkar á hann er
$$F = \rho gSh.$$

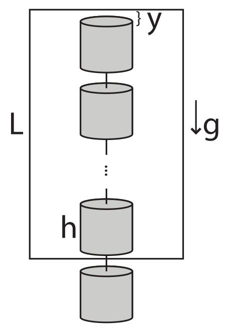
(c) (4) Snúum okkur nú að vélinni. N sívalningslaga massar, hver með hæð h og flatarmál S, eru tengdir með reipi og settir í vatnsker með lengd L. Hæsti massinn skagar lengd x upp úr kerinu og sá lægsti hefur sömu lengd x í kerinu (sjá mynd á næstu síðu).

Reipið með mössunum verður fyrir krafti vegna þrýstings lofts og vatns. Finnið þann kraft sem fall af g, P_0, ρ, S, h, L, N og/eða x.



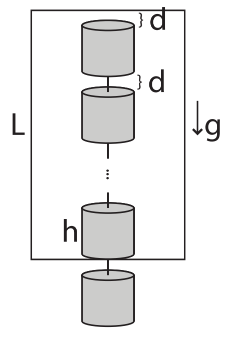
(d) (3) Nú er neðsti kubburinn algjörlega út úr vatninu og sá efsti í fjarlægð y frá vatnsyfirborðinu.

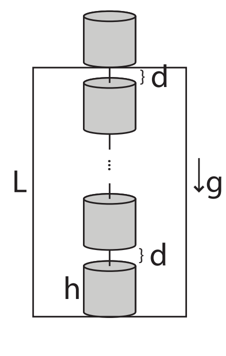
Reipið með mössunum verður áfram fyrir krafti vegna þrýstings lofts og vatns. Finnið þann kraft sem fall af g, P_0, ρ, S, h, L, N og/eða y.



(e) (6) Köllum fjarlægðina milli tveggja aðliggjandi massa d. Reipið með mössunum færist eins og sést á myndunum hér að neðan. Fyrir færsluna nemur næstneðsti kubburinn við neðri brún vatnskersins en eftir færsluna nemur neðsti kubburinn við neðri brún vatnskersins.

Hver er vinnan sem reipið með mössunum verður fyrir vegna þrýstings vatns og lofts?

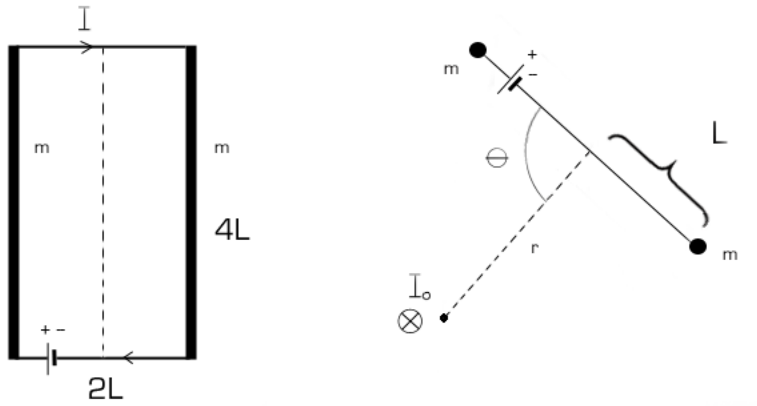




(f) (1) Útskýrið í stuttu máli af hverju vélin virkar ekki.

Dæmi 5 - Segulkraftar á straumlykkju

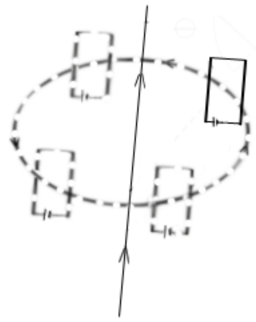
Höfum straumlykkju búna til úr tveimur járnsívalningum með massa m, að lengd $4L$ og massalausum, stífum vírum í sitt hvorum endanum, báða að lengd $2L$ sem gera kleift að mynda straum I í lykkjunni. Miðás straumlykkjunnar er í fjarlægð r frá löngum vír sem leiðir straum I_0 og myndar straumlykkjan hornið θ við línu frá miðás lykkjunnar að vírnum.



Mynd 1: Á myndinni til hægri stefnir straumurinn I_0 inn í myndina.

a) (5) Hvert er segulsviðið við járnstykkin tvö af völdum straumsins í vírnum, I_0, fyrir gefið θ?

b) (5) Nú er gefið að $r >> L$. Hver er Taylorliðunin fyrir segulsviðin úr lið a) upp á fyrsta nálgunarlið?



c) (5) Nú er $r >> L$ þ.a. við lítum á sem svo að segulkrafturinn á hvort járnstykkið frá vírnum sé samsíða línunni frá miðás(snúningsás) straumlykkjunnar að vírnum. Hvert er vægið sem verkar á straumlykkjuna fyrir gefið θ? Notið nálgunina úr lið b) eða gefið ykkur að fjarlægðin í hvort járnstykki sé jafnt og $r \pm \Delta r$ ef ekki fékkst svar í liðum a) og b).

d) (5) Nú er slökkt á straumnum í lykkjunni og lykkjunni snúið í kring um vírinn með hornhröðun α. Á einhverjum tímapunkti verður hornið $\theta = 0$ og þá kveikt á straumnum, I, í lykkjunni. Ef α er nógu lítið nær hornið θ jafnvægistöðu í $\theta = \phi$. Finnið ϕ sem fall af α, I_0, I, r, L, m og μ_0. Notið niðurstöðuna ykkar úr lið c) og gerið ráð fyrir engu þyngdarafli.