Landskeppni í eðlisfræði 2016

Úrslitakeppni

2. apríl kl. 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 4 dæmum sem eru öll í nokkrum liðum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 4 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör. Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi. Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

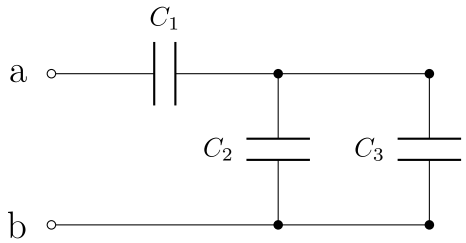
Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

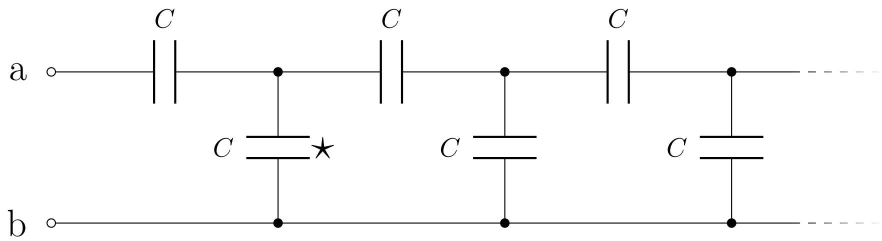
Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Fasti Plancks	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

1 Þéttar og viðnám

1) (3 stig) Finndu heildarrýmdina C_{heild} milli punktanna a og b í rásinni sem sýnd er á myndinni að neðan.

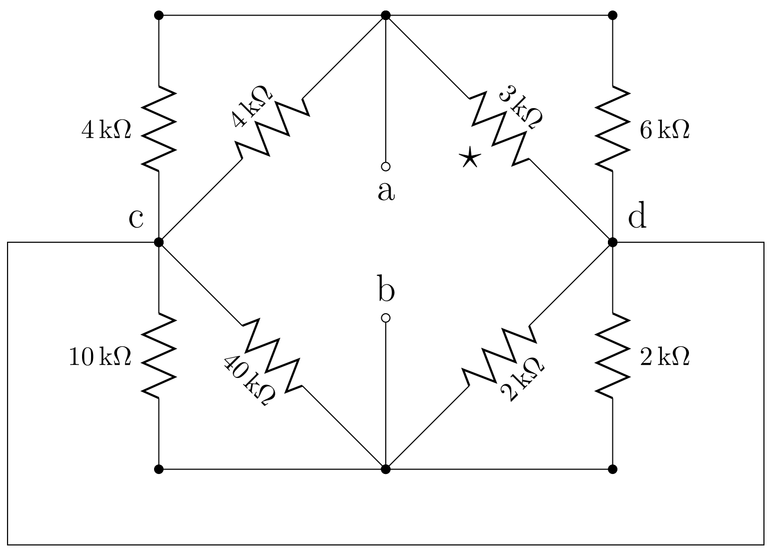


2) (7 stig) Næsta mynd sýnir kerfi þétta sem allir hafa sömu rýmd C. Kerfið nær út í óendanlegt til hægri og sama mynstrið er endurtekið. Finndu heildarrýmdina C_∞ milli punktanna a og b. *Ábending:* Hægt er að nota niðurstöðuna úr lið 1) með því að velja rétt gildi á C_1, C_2 og C_3.



3) (4 stig) Nú er spennan V sett á milli punktanna a og b í rásinni að ofan (t.d. með rafhlöðu) og þéttarnir hlaðast. Reiknaðu út hleðsluna á þéttinum sem merktur er með stjörnu ($\star$) þegar hann er fullhlaðinn. Notaðu stærðirnar V, C og C_∞ í lokasvarinu (þú þarft ekki að hafa leyst lið 2).

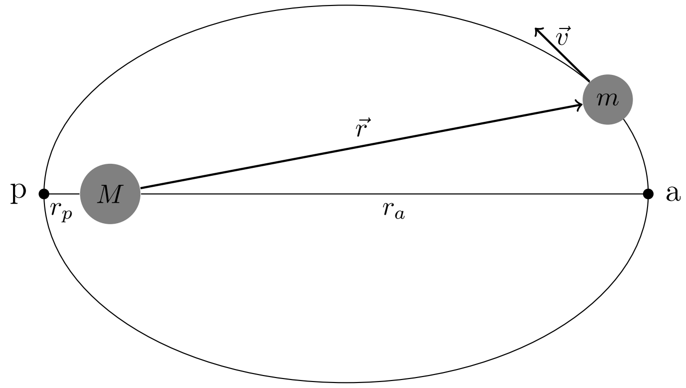
4) (3 stig) Finndu jafngilda viðnámið R_{heild} milli punktanna a og b í rásinni, sem sýnd er á næstu mynd. Athugaðu að punktarnir c og d eru tengdir.



5) (3 stig) Nú er $V = 17\,\text{V}$ jafnspennugjafi tengdur milli punktanna a og b. Finndu strauminn í gegnum $3\,\text{k}\Omega$–viðnámið (það er merkt með stjörnu).

2 Aflfræði brauta

Hugsum okkur geimfar með massa m á sporbraut um hnött (t.d. plánetu) með með mun stærri massa $M \gg m$. Í kyrrstöðukerfi hnattarins ferðast geimfarið eftir sporbaug (ellipsu) með brennipunkt í miðju hnattarins. Staðsetningarvigur geimfarsins miðað við hnöttinn táknum við með $\vec{r}$, og hraða geimfarsins táknum við með $\vec{v}$. Þegar fjarlægðin $r = |\vec{r}|$ tekur lægsta mögulega gildi, r_p, þá segjum við að geimfarið sé í *nándarstöðu* og þegar það tekur hæsta gildi, r_a, þá segjum við að það sé í *firðstöðu* (sjá mynd að neðan).



1) (6 stig) Táknum hraðann í firðstöðu með v_a. Notið lögmál um varðveislu orku og hverfiþunga til þess að sýna að hraðinn í firðstöðu uppfyllir:

$$\frac{1}{2}v_a^2 = GM\frac{r_p}{r_a(r_p + r_a)} \tag{1}$$

Ábending: Þegar geimfarið er í firðstöðu eða nándarstöðu þá er hraði þess hornréttur á staðsetningarvigurinn $\vec{r}$. Notaðu þessa staðreynd ásamt varðveislu hverfiþungans til þess að finna samband milli r_a, v_a annars vegar og r_p, v_p hins vegar.

2) (1 stig) Sýndu að jöfnu (1) megi rita:

$$\frac{1}{2}v_a^2 = GM\frac{2a - r_a}{r_a(2a)} \tag{2}$$

þar sem a er hálfur langás sporbaugsins. Þú mátt nota niðurstöðu úr lið (1) án þess að hafa leyst hann.

3) (3 stig) Sýndu að heildarorka geimfarsins (summa skriðorku og stöðuorku) sé

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

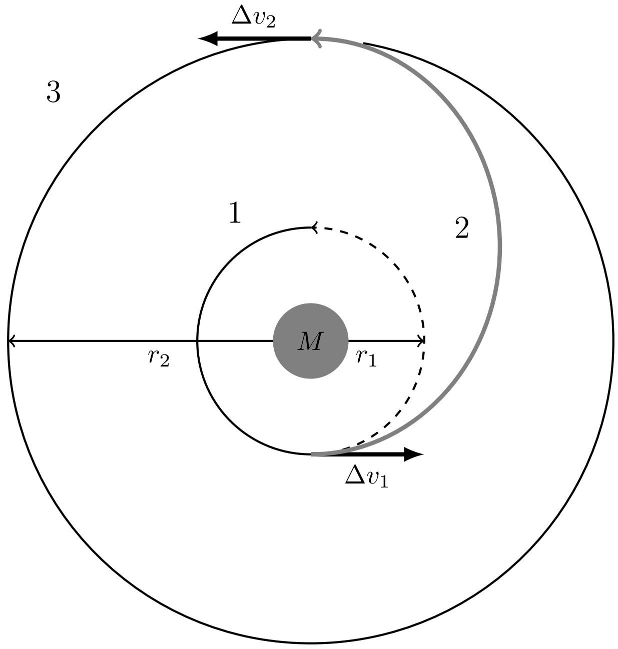
og leiddu út *vis–viva*–jöfnuna:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{3}$$

Þú mátt nota niðurstöður úr fyrri liðum án þess að hafa leyst þá.

4) (7 stig) Geimfar eitt er á hringlaga braut með geisla r_1 í kringum hnött með massa M. Til þess að færast yfir á aðra hringlaga braut með geisla $r_2 > r_1$ getur geimfarið aukið hraðann með eldflaugarhreyfli sínum. Ein aðferð til þess er *Hohmann–færslan* sem sýnd er á næstu mynd. Geimfarið kveikir á eldflaugarhreyflinum í stuttan tíma og eykur hraðann um Δv_1 (gera má ráð fyrir að hraðaaukningin taki svo lítinn tíma að geimfarið færist nánast ekkert á meðan). Þannig kemst geimfarið á sporbraut (2 á myndinni) sem sker innri hringlaga brautina í nándarstöðu og ytri hringlaga brautina í firðstöðu. Þegar geimfarið snertir ytri hringinn með radíus r_2 þá kveikir það aftur á hreyflinum og eykur hraðann um Δv_2, og ferðast eftir það á hringlaga braut með geisla r_2.

Finndu hraðaaukningarnar Δv_1 og Δv_2. Finndu einnig tímann t_H sem Hohmann-færslan tekur (það er, tímann sem það tekur geimfarið að ferðast milli hringlaga brautanna tveggja).



5) (3 stig) Þó við höfum aðeins leitt út *vis–viva*–jöfnuna fyrir brautir sem eru sporbaugar, þá gildir hún einnig fyrir ótakmarkaðar brautir (fleygboga og breiðboga). Finnið lausnarhraða geimfars í fjarlægð r frá hnetti með massa M. *Lausnarhraði* er minnsti hraði sem geimfarið þarf að hafa til þess að sleppa úr þyngdarmætti hnattarins (þ.e. komast „út í óendanlegt“).

3 Hröðun í afstæðiskenningu Einsteins

Athugasemd: Ekki er gert ráð fyrir neinni þekkingu í takmörkuðu afstæðiskenningu Einsteins í þessu dæmi. Allt sem notað er úr kenningunni er útskýrt í textanum að neðan.

Ímyndum okkur að Lísa horfi út um geimskipið sitt, sem er kyrrstætt í upphafspunkti hnitakerfis. Lísa sér geimskipið hans Róberts ferðast í stefnu x-áss. Róbert gerir tilraun með gorm inni í geimskipinu sínu og mælir skv. strekkingu gormsins að hröðun geimskipsins síns sé fastinn a_0.

Samkvæmt klassískri aflfræði myndi Lísa sjá geimskipið hans Róberts ferðast með þessari föstu hröðun. Hraði Róberts myndi aukast stöðugt, þar til hraðinn að lokum færi langt yfir hraða ljóssins. En við vitum að ekkert getur ferðast hraðar en ljósið svo eitthvað er bogið við þessa forsendu.

Samkvæmt takmörkuðu afstæðiskenningu Einsteins er hröðun geimskips Róberts $a(t)$, eins og Lísa mælir hana á tímanum t, ekki gefin með a_0 heldur með jöfnunni

$$a(t) = a_0 \left(1 - v(t)^2/c^2\right)^{3/2} \tag{4}$$

þar sem $v(t)$ er hraði geimskipsins á tímanum t.

1) (2 stig) Hver er hraði geimskipsins hans Róberts $v(t)$, skv. klassískri aflfræði? Gerðu ráð fyrir að $v(0) = 0$.

2) (8 stig) Lísa mælir hraða geimskipsins hans Róberts, $v(t)$, á tímanum t. Sýndu að skv. takmörkuðu afstæðiskenningunni mun hún mæla hraðann:

$$v(t) = \frac{ca_0 t}{\sqrt{c^2 + a_0^2 t^2}} \tag{5}$$

Gerðu ráð fyrir að $v(0) = 0$.

Athugasemd: Hér gæti verið gagnlegt að nýta sér að diffurjöfnuna $dy/dx = (1 - y^2)^{3/2}$ má skrifa með aðskilnaði breytistærða sem

$$\int \frac{1}{(1 - y^2)^{3/2}} dy = \int dx \tag{6}$$

Einnig má nota að

$$\int \frac{1}{\left(1 - y^2\right)^{3/2}} dy = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} + K \tag{7}$$

þar sem K er fasti.

3) (6 stig) Hver er hraði geimskipsins skv. takmörkuðu afstæðiskenningunni fyrir eftirfarandi gildi? Þú mátt nota jöfnu (5) án þess að hafa leyst lið 2.

i) $a_0 t = c \cdot 10^{-3}$
ii) $a_0 t = c$
iii) $a_0 t = c \cdot 10^3$

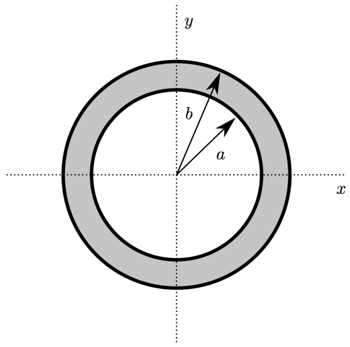
4) (4 stig) Hver er mesti hraði sem Lísa mælir á geimskipinu hans Róberts, þ.e. þegar $t \to \infty$? Útskýrðu með tilvísun í jöfnu (5). Þú mátt nota hana án þess að hafa leyst lið 2.

4 Hleðsla inni í kúluskel

Jákvæðri punkthleðslu q er komið fyrir inni í leiðandi kúluskel. Skelin hefur innri radíus a og ytri radíus b. **Ekki** má gera ráð fyrir að $b - a$ sé hverfandi. Við teiknum hnitakerfi þannig að miðja skeljarinnar sé í upphafspunkti hnitakerfisins. Myndin að neðan sýnir þversnið kúluskeljarinnar. Vinsamlegast teiknaðu öll gröf sem beðið er um inn í viðeigandi hnitakerfi á svarblaði sem fylgir keppninni. Hafðu alla útreikninga á eigin blaði (eins og fyrir hin dæmin í keppninni), engir útreikningar eiga að vera á svarblaðinu.

*Athugasemd 1: Athugaðu vel að myndin sýnir þversnið **kúlu** en ekki sívalnings.*

Athugasemd 2: Þegar skissa á gröf hefur góður frágangur jákvæð áhrif en teiknihæfileikar skipta engu máli.



1) (10 stig) Í þessum lið gerum við ráð fyrir að punkthleðslan sé staðsett í miðju kúluskeljarinnar, þ.e. í upphafspunkti hnitakerfisins.

i) Finndu rafsviðið $E(x)$ á $x-$ás fyrir $x < a$, $a < x < b$ og $x > b$. Tiltaktu sérstaklega hvað gerist í punktunum $x = a$ og $x = b$, þ.e. finndu $E(x)$ þegar x stefnir á a og b, bæði frá vinstri og hægri.

ii) Skissaðu graf af rafsviðinu á $x-$ás. Notaðu hnitakerfið sem gefið er á svarblaði og merktu inn gildin sem þú reiknaðir í i) á $E-$ásinn (þ.e. í punktunum $x = \pm a$ og $x = \pm b$).

iii) Finndu spennuna $V(x)$ á $x-$ás fyrir $x < a$, $a < x < b$ og $x > b$, miðað við að spennan óendanlega langt frá kúluskelinni sé 0 (þ.e. $V(x) \to 0$ þegar $x \to \infty$). Tiltaktu sérstaklega gildin á V(a) og V(b).

iv) Skissaðu graf af spennunni á $x-$ás. Notaðu hnitakerfið sem gefið er á svarblaði og merktu inn gildin sem þú reiknaðir í iii) á $V-$ásinn (þ.e. fyrir $x = \pm a$ og $x = \pm b$).

2) (10 stig) Í þessum lið gerum við ráð fyrir að punkthleðslan sé staðsett á x-ás, í punktinum x $= 2a/3$.

i) Finndu rafsviðið $E(x)$ á $x-$ás fyrir $a < x < b$ og $x > b$. Tiltaktu sérstaklega hvað gerist í punktinum $x = b$, þ.e. finndu $E(x)$ þegar x stefnir á b, bæði frá vinstri og hægri. (Taktu eftir að ekki þarf að finna $E(x)$ fyrir $x < a$).

ii) Skissaðu graf af rafsviðinu á $x-$ás. Notaðu hnitakerfið sem gefið er á svarblaði og merktu inn gildin sem þú reiknaðir í i) á $E-$ásinn, fyrir $x = \pm b$. Hér er ekki gert ráð fyrir að fundin sé jafna fyrir $E(x)$ þegar $x < a$, en merktu inn gildið á $E(a)$ sem þú reiknaðir í **lið 1 i)** og sýndu rafsviðið þegar x nálgast a frá vinstri og x nálgast $-a$ frá hægri, miðað við það gildi.

iii) Finndu spennuna $V(x)$ á $x-$ás fyrir $a < x < b$ og $x > b$, miðað við að spennan óendanlega langt frá kúluskelinni sé 0 (þ.e. $V(x) \to 0$ þegar $x \to \infty$). Tiltaktu sérstaklega gildin á V(a) og V(b).

iv) Skissaðu graf af spennunni á $x-$ás. Notaðu hnitakerfið sem gefið er á svarblaði og merktu inn gildin sem þú reiknaðir í iii) á $V-$ásinn (þ.e. fyrir $x = \pm a$ og $x = \pm b$).

v) Skissaðu mynd á svarblaðið sem sýnir rafsviðslínur innan, inni í og utan kúluskeljarinnar (ef einhverjar eru). Sýndu a.m.k. 8 rafsviðslínur á hverju svæði þar sem rafsviðið er ekki 0.