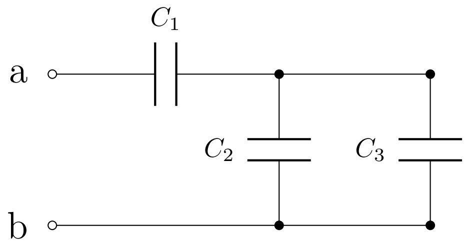
Eðlisfræðikeppni 2016 — Lausnir

Pétur Rafn Bryde

29. maí 2016

1 Þéttar og viðnám

1) (3 stig) Finndu heildarrýmdina C_{heild} milli punktanna a og b í rásinni sem sýnd er á myndinni að neðan.



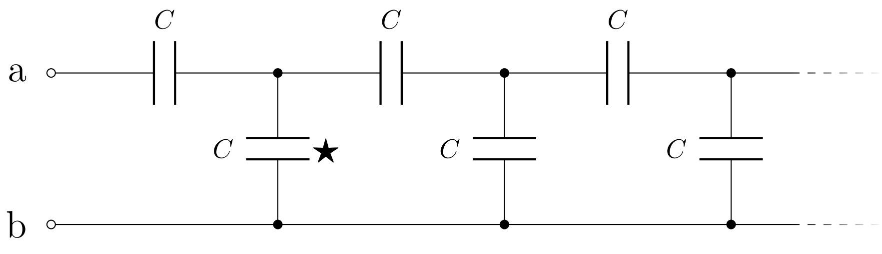
Lausn. Með því að nota reglur um raðtengingu og hliðtengingu viðnáma fæst

$$\frac{1}{C_{\text{heild}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3},$$

eða

$$C_{\text{heild}} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

2) (7 stig) Næsta mynd sýnir kerfi þétta sem allir hafa sömu rýmd C. Kerfið nær út í óendanlegt til hægri og sama mynstrið er endurtekið. Finndu heildarrýmdina C_∞ milli punktanna a og b. *Ábending:* Hægt er að nota niðurstöðuna úr lið 1) með því að velja rétt gildi á C_1, C_2 og C_3.



Lausn. Með því að bera saman myndirnar tvær sést að kerfin tvö eru jafngild ef við veljum $C_1 = C$, $C_2 = C$ og $C_3 = C_\infty$. Með því að nota niðurstöðuna úr síðasta lið fæst sambandið

$$C_\infty = \frac{C^2 + CC_\infty}{2C + C_\infty}.$$

Með smá algebru fæst

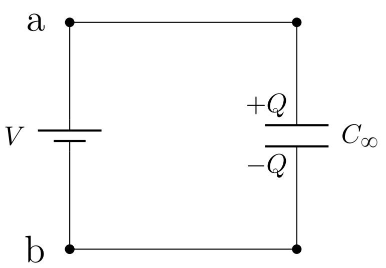
$$C_\infty^2 + CC_\infty - C^2 = 0,$$

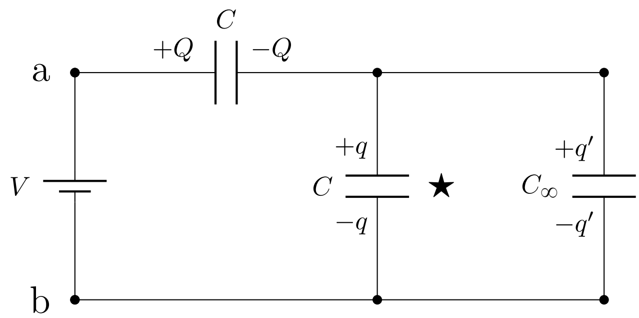
sem er annars stigs jafna í C_∞ og því auðleyst. Hún hefur tvær lausnir í rauntölunum en önnur er neikvæð og kemur því ekki til greina. Jákvæða lausnin er:

$$C_\infty = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C.$$

3) (4 stig) Nú er spennan V sett á milli punktanna a og b í rásinni að ofan (t.d. með rafhlöðu) og þéttarnir hlaðast. Reiknaðu út hleðsluna á þéttinum sem merktur er með stjörnu (★) þegar hann er fullhlaðinn. Notaðu stærðirnar V, C og C_∞ í lokasvarinu (þú þarft ekki að hafa leyst lið 2).

Lausn. Myndirnar að neðan sýna rásina með spennugjafanum. Í efri myndinni hefur þéttunum verið skipt út fyrir jafngilda þéttinn C_∞ og heildarhleðslan Q í rásinni merkt inn. Á neðri myndinni má sjá jafngilt kerfi þar sem C_∞ hefur verið skipt út fyrir þrjá þétta, rétt eins og í síðasta lið. Hleðslan q á stjörnumerkta þéttinum og q' á þéttinum C_∞ hafa verið merktar inn. Við viljum finna q.





Þar sem hleðslan í kerfinu varðveitist þá verður að gilda $Q = q + q'$. Út frá efri myndinni og skilgreiningu C_∞ þá fæst

$$V = \frac{Q}{C_\infty} \quad \text{svo} \quad Q = VC_\infty.$$

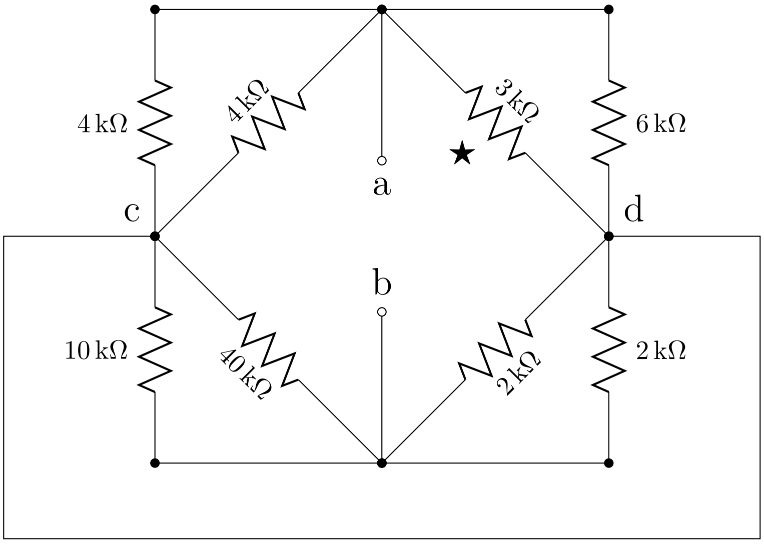
Út frá neðri myndinni fæst að heildaspennan er $V = \frac{Q}{C} + \frac{q}{C}$. Þá fæst

$$q = C\left(V - \frac{Q}{C}\right) = \left(V - C\frac{C_\infty}{C}V\right),$$

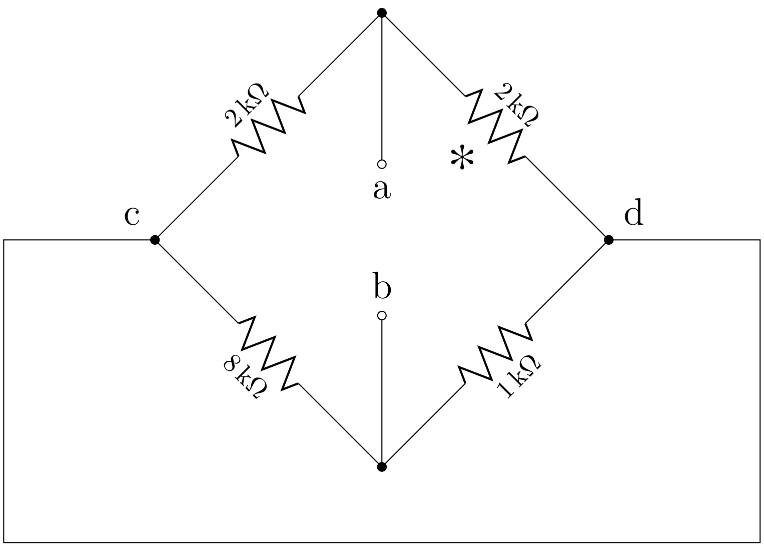
eða

$$q = \left(1 - \frac{C_\infty}{C}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}CV.$$

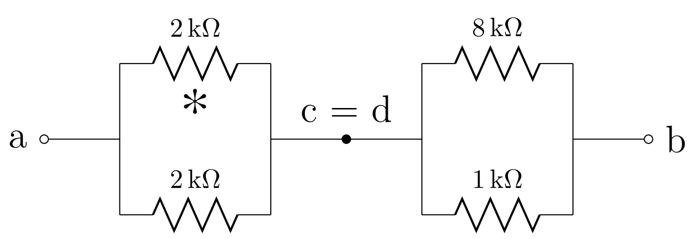
4) (3 stig) Finndu jafngilda viðnámið R_{heild} milli punktanna a og b í rásinni, sem sýnd er á næstu mynd. Athugaðu að punktarnir c og d eru tengdir.



Lausn. Byrjum á því að skipta út hliðtengdum viðnámum fyrir jafngild viðnám:



Þar sem punktarnir c og d eru tengdir getum við litið svo á að þeir séu *sami punkturinn*. Sannfærið ykkur um að eftirfarandi kerfi sé jafngilt:



Nú fæst með því að nota reglur um raðtengd og hliðtengd viðnám að jafngilda viðnámið milli punkta a og b er $\frac{17}{9}\,\mathrm{k\Omega}$ eða um það bil $1{,}89\,\mathrm{k\Omega}$.

5) (3 stig) Nú er $V = 17\,\mathrm{V}$ jafnspennugjafi tengdur milli punktanna a og b. Finndu strauminn í gegnum $3\,\mathrm{k\Omega}$–viðnámið (það er merkt með stjörnu).

Lausn. Heildarstraumurinn milli punktanna a og b fæst með því að nota svarið úr síðasta lið:

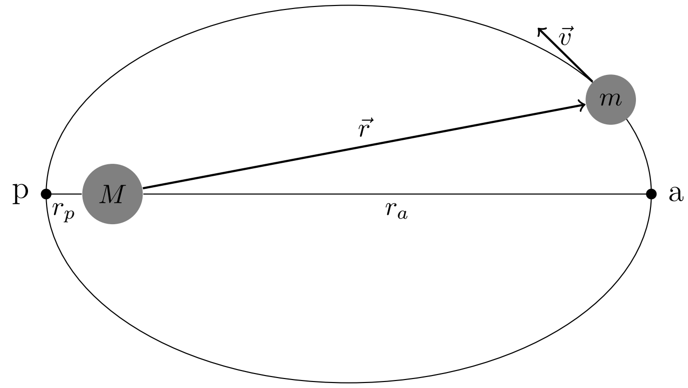
$$I = \frac{V}{R_{\text{heild}}} = 9\,\mathrm{A}.$$

Skoðum jafngilda kerfið á síðustu mynd. Nákvæmlega helmingur straumsins eða $4{,}5\,\mathrm{A}$ fer í gegnum viðnámið sem merkt er $\circledast$. Þetta viðnám svarar til hliðtengdu $3\,\mathrm{k\Omega}$ og $6\,\mathrm{k\Omega}$ viðnámanna á fyrstu myndinni. Straumurinn í gegnum $3\,\mathrm{k\Omega}$ viðnámið (merkt með $\bigstar$) er því

$$\frac{6}{3+6}\frac{I}{2} = 3\,\mathrm{A}.$$

2 Aflfræði brauta

Hugsum okkur geimfar með massa m á sporbraut um hnött (t.d. plánetu) með með mun stærri massa $M \gg m$. Í kyrrstöðukerfi hnattarins ferðast geimfarið eftir sporbaug (ellipsu) með brennipunkt í miðju hnattarins. Staðsetningarvigur geimfarsins miðað við hnöttinn táknum við með $\vec{r}$, og hraða geimfarsins táknum við með $\vec{v}$. Þegar fjarlægðin $r = |\vec{r}|$ tekur lægsta mögulega gildi, r_p, þá segjum við að geimfarið sé í *nándarstöðu* og þegar það tekur hæsta gildi, r_a, þá segjum við að það sé í *firðstöðu* (sjá mynd að neðan).



1) (6 stig) Táknum hraðann í firðstöðu með v_a. Notið lögmál um varðveislu orku og hverfiþunga til þess að sýna að hraðinn í firðstöðu uppfyllir:

$$\frac{1}{2}v_a^2 = GM\frac{r_p}{r_a(r_p + r_a)} \tag{1}$$

Ábending: Þegar geimfarið er í firðstöðu eða nándarstöðu þá er hraði þess hornréttur á staðsetningarvigurinn $\vec{r}$. Notaðu þessa staðreynd ásamt varðveislu hverfiþungans til þess að finna samband milli r_a, v_a annars vegar og r_p, v_p hins vegar.

Lausn. Heildarorka geimfarsins í fjarlægð r frá hnettinum er

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}. \tag{2}$$

Samkvæmt lögmálinu um varðveislu orkunnar er þessi stærð fasti fyrir hreyfingu geimfarsins. Sér í lagi gildir

$$\frac{1}{2}v_a^2 - GM\frac{1}{r_a} = \frac{1}{2}v_p^2 - GM\frac{1}{r_p}, \tag{3}$$

þar sem búið er að deila með massa geimfarsins m. Þegar geimfarið er í firðstöðu hraði þess hornréttur á staðsetningarvigurinn $\vec{r}$ og því fæst hverfiþunginn með

$$L = |\vec{L}| = m|\vec{r}_a \times \vec{v}_a| = mr_av_a.$$

Með því að reikna út hverfiþungann í nándarstöðu fæst á sama hátt

$$L = |\vec{L}| = mr_pv_p$$

svo $r_a v_a = r_p v_p$. Með því að stinga inn fyrir v_p í jöfnunni 3 fæst

$$\frac{1}{2}v_a^2 - GM\frac{1}{r_a} = \frac{1}{2}\frac{r_a^2}{r_p^2}v_a^2 - GM\frac{1}{r_p} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{r_a^2}{r_p^2}\right)v_a^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{r_a}{r_p}\right)\left(1 + \frac{r_a}{r_p}\right)v_a^2 = 2GM\left(1 - \frac{r_a}{r_p}\right)\frac{1}{r_a}.$$

Loks fæst

$$\frac{v_a^2}{2} = GM\frac{r_p}{r_a(r_p + r_a)}.$$

2) (1 stig) Sýndu að jöfnu (1) megi rita:

$$\frac{1}{2}v_a^2 = GM\frac{2a - r_a}{r_a(2a)} \tag{4}$$

þar sem a er hálfur langás sporbaugsins. Þú mátt nota niðurstöðu úr lið (1) án þess að hafa leyst hann.

Lausn. Þessi liður liður leiðir auðveldlega af $2a = r_a + r_p$.

3) (3 stig) Sýndu að heildarorka geimfarsins (summa skriðorku og stöðuorku) sé

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

og leiddu út *vis–viva*–jöfnuna:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{5}$$

Þú mátt nota niðurstöður úr fyrri liðum án þess að hafa leyst þá.

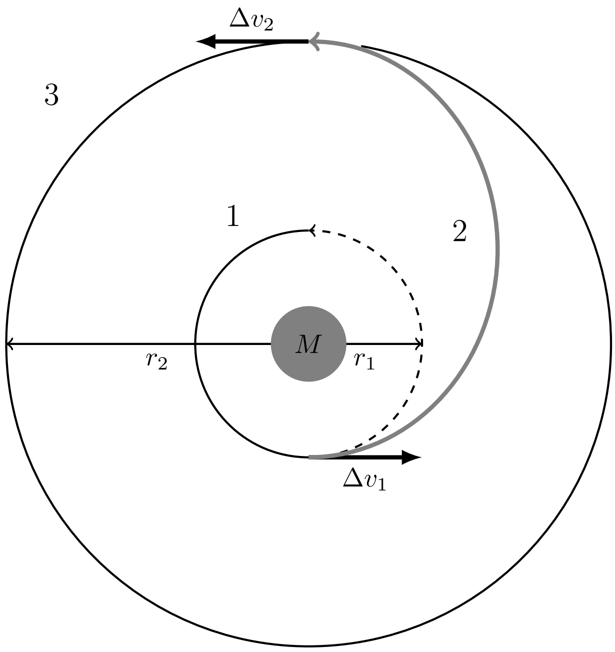
Lausn. Jafnan fyrir E fæst með augljósri innsetningu út frá síðustu niðurstöðu og

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 - GMm\frac{1}{r_a}.$$

Vis–viva–jafnan fæst svo út frá orkuvarðveislu með jöfnu 2.

4) (7 stig) Geimfar eitt er á hringlaga braut með geisla r_1 í kringum hnött með massa M. Til þess að færast yfir á aðra hringlaga braut með geisla $r_2 > r_1$ getur geimfarið aukið hraðann með eldflaugarhreyfli sínum. Ein aðferð til þess er *Hohmann–færslan* sem sýnd er á næstu mynd. Geimfarið kveikir á eldflaugarhreyflinum í stuttan tíma og eykur hraðann um Δv_1 (gera má ráð fyrir að hraðaaukningin taki svo lítinn tíma að geimfarið færist nánast ekkert á meðan). Þannig kemst geimfarið á sporbraut (2 á myndinni) sem sker innri hringlaga brautina í nándarstöðu og ytri hringlaga brautina í firðstöðu. Þegar geimfarið snertir ytri hringinn með radíus r_2 þá kveikir það aftur á hreyflinum og eykur hraðann um Δv_2, og ferðast eftir það á hringlaga braut með geisla r_2.

Finndu hraðaaukningarnar Δv_1 og Δv_2. Finndu einnig tímann t_H sem Hohmann-færslan tekur (það er, tímann sem það tekur geimfarið að ferðast milli hringlaga brautanna tveggja).



Lausn. Þegar geimfarið kveikir fyrst á hreyflinum er það á braut með $r = a = r_1$, og hraða

$$\sqrt{GM\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_1}\right)} = \sqrt{GM\frac{1}{r_1}}.$$

Geimfarið færir sig yfir á braut með $a = \frac{r_1+r_2}{2}$ og hraðinn verður því

$$\sqrt{GM\left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1+r_2}\right)}.$$

Með smá algebru fæst að mismunurinn er

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right)$$

Á hliðstæðan hátt fæst

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

5) (3 stig) Þó við höfum aðeins leitt út *vis–viva*–jöfnuna fyrir brautir sem eru sporbaugar, þá gildir hún einnig fyrir ótakmarkaðar brautir (fleygboga og breiðboga). Finnið lausnarhraða geimfars í fjarlægð r frá hnetti með massa M. *Lausnarhraði* er minnsti hraði sem geimfarið þarf að hafa til þess að sleppa úr þyngdarmætti hnattarins (þ.e. komast „út í óendanlegt“).

Lausn. Sannfærið ykkur um að þegar geimfarið er á lausnarhraða v_∞ þá er heildarorkan

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{Mm}{r}$$

nákvæmlega núll. Það er vegna þess að þegar fjarlægðin r stefnir á óendanlegt þá á hraðinn að stefna á núll. Við fáum því

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Þetta er klassíska leiðin til að leiða út þessa niðurstöðu. Það má einnig fá þessa niðurstöðu beint úr frá vis–viva–jöfnunni með því að taka markgildið $a \to \infty$ með fast r.

Lausnir á dæmum 3 og 4

Landskeppni í eðlisfræði 2016

Hólmfríður Hannesdóttir

Dæmi 3

1. Hraðinn á tímanum t skv. klassískri aflfræði er

$$v(t) = a_0 t$$

því upphafshraðinn á tímanum $t = 0$ er $v(0) = 0$.

2. Við vitum að

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Því gefur jafna (4):

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

Jafna (6) gefur þá að

$$\int \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv = a_0 \int dt$$

Nú getum við notað jöfnu (7) með $u = v/c$ og þá $du = dv/c$ og fengið að

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = a_0 \left(t + K\right)$$

þar sem K er fasti.

Með því að hefja báðar hliðar í annað veldi og leysa þessa jöfnu fyrir $v^2(t)$ fæst að

$$v^2(t) = \frac{c^2 a_0^2 \left(t + K\right)^2}{c^2 + a_0^2 \left(t + K\right)^2}$$

og því

$$v(t) = \frac{c a_0 \left(t + K\right)}{\sqrt{c^2 + a_0^2 \left(t + K\right)^2}}$$

Við notum hér jákvæðu lausnina fyrir $v(t)$ því gefið var að Róbert ferðist í stefnu x-áss.

Skv. þessari jöfnu fæst að $v(0) = \frac{ca_0 K}{\sqrt{c^2+a_0^2(t+K)^2}}$. Gefið er í dæminu að $v(0) = 0$, sem þýðir að $K = 0$. Þar með höfum við að

$$v(t) = \frac{ca_0 t}{\sqrt{c^2 + a_0^2 t^2}}$$

eins og átti að sýna.

3. Með því að stinga gefnum gildum inn í jöfnu (4) fæst:

   i)

$$v(t) = \begin{cases} 3.00 \cdot 10^5 \text{ m/s} \\ c \cdot 10^{-3} \\ c \cdot 10^{-3} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}\right) \end{cases}$$

   ii)

$$v(t) = \begin{cases} 2.12 \cdot 10^5 \text{ m/s} \\ c \cdot 0.707 \\ c/\sqrt{2} \end{cases}$$

   iii)

$$v(t) = \begin{cases} 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \approx c \\ c \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}\right) \end{cases}$$

   Takið eftir að $a_0 t$ er gildið á $v(t)$ sem hefði fengið samkvæmt klassískri aflfræði. Með því að bera saman $a_0 t$ og $v(t)$ (fengið með afstæðiskenningunni) sést að þar getur munað miklu á.

   (Gefið var rétt fyrir öll ofangreind svör en þriðja svarið í lið i) og iii) er nákvæmast og fæst með Taylor liðun. Þess var ekki krafist hér.)

4. Við notum jöfnu (5) og fáum að

$$v(t) = \frac{ca_0 t}{\sqrt{c^2 + a_0^2 t^2}}$$

$$v(t) = \frac{ca_0}{\sqrt{c^2/t^2 + a_0^2}}$$

   Þegar $t \longrightarrow \infty$ fæst að

$$v(t) \longrightarrow \frac{ca_0}{\sqrt{0^2 + a_0^2}} = c$$

   svo mesti hraði sem Lísa mælir er c, þ.e. ljóshraðinn! Lísa sér Róbert því alltaf ferðast með hraða sem er minni en ljóshraðinn á endanlegum tíma.

Dæmi 4

1. (i) Við notum lögmál Gauss til að leysa þennan lið. Gaussyfirborðið er kúluyfirborð með radíus x.

   Ef $x < a$ eða $x > b$ fæst:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{1}$$

   Vegna samhverfu er $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ svo þessa jöfnu má einfalda í

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2}$$

   þar sem E er tölugildi rafsviðsins (í stefnu beint út frá miðju kúlunnar). Því fæst

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2} \tag{3}$$

   Ef hins vegar $a < x < b$ vitum við að $E(x) = 0$, því kúluskelin er leiðandi og rafsvið inni í leiðara er alltaf 0.

   Því fæst eftirfarandi:

   - Þegar x stefnir á a frá vinstri er $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^2}$
   - Þegar x stefnir á a frá hægri er $E(x) = 0$
   - Þegar x stefnir á b frá vinstri er $E(x) = 0$
   - Þegar x stefnir á b frá hægri er $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{b^2}$

   (ii) Sjá svarblað

   (iii) Munum að spenna er gefin með $V = -\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Með tegrun fæst:

   - Fyrir $x < b$ er $V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} + K_1$ þar sem K_1 er fasti. En við vitum að $V(x) \to 0$ þegar $x \to \infty$ svo $K_1 = 0$, og því

$$V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \tag{4}$$

   - Fyrir $a < x < b$ er $V(x) = K_2$ þar sem K_2 er fasti, því $E(x) = 0$ á þessu bili. En þar sem $V(x)$ er samfellt fall fæst skv. jöfnu 4 að $K_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$, þ.e.

$$V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \tag{5}$$

   - Fyrir $x < a$ er $V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} + K_3$ þar sem K_3 er fasti. En við vitum að $V(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$ því $V(x)$ er samfellt fall. Þar með er

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + K_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \tag{6}$$

     þ.e.

$$K_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \tag{7}$$

þ.e.

$$V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \tag{8}$$

Sér í lagi er

$$V(a) = V(b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \tag{9}$$

(iv) Sjá svarblað.

2. (i) Frjálsu hleðslurnar í leiðaranum munu raða sér þannig að $E(x) = 0$ fyrir $a < x < b$. Því er kerfið kúlusamhverft fyrir $x > a$ svo eins og í lið 1. (i) fæst að

   - Fyrir $x > b$ er

   $$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2} \tag{10}$$

   - Fyrir $a < x < b$ er

   $$E(x) = 0 \tag{11}$$

   Sér í lagi gildir:

   - Þegar x stefnir á b frá vinstri er $E(x) = 0$
   - Þegar x stefnir á b frá hægri er $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{b^2}$

   (ii) Sjá svarblað.

   (iii) Þessi liður er nákvæmlega eins og 1. (iii) vegna kúlusamhverfu kerfisins fyrir $x > a$. Því fæst:

   - Fyrir $x > b$ er

   $$V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \tag{12}$$

   - Fyrir $a < x < b$ er

   $$V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \tag{13}$$

   Sér í lagi er

   $$V(a) = V(b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \tag{14}$$

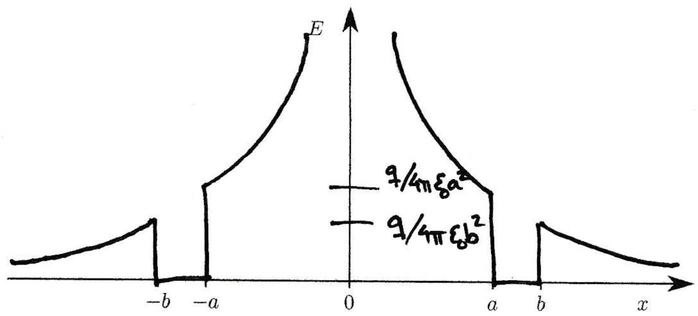
   (iv) Sjá svarblað.

   (v) Sjá svarblað.

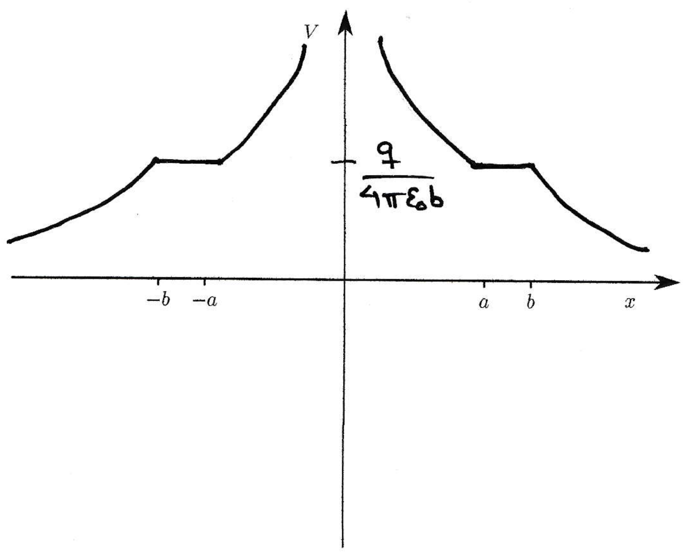
Svarblað fyrir dæmi 4

Landskeppni í eðlisfræði, 2. apríl 2016

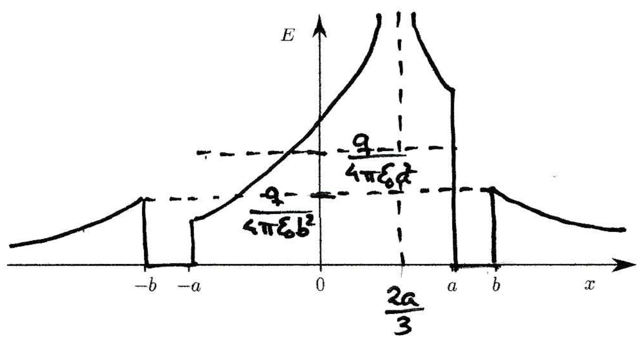
Dæmi 4, liður 1. ii)



Dæmi 4, liður 1. iv)



Dæmi 4, liður 2. ii)

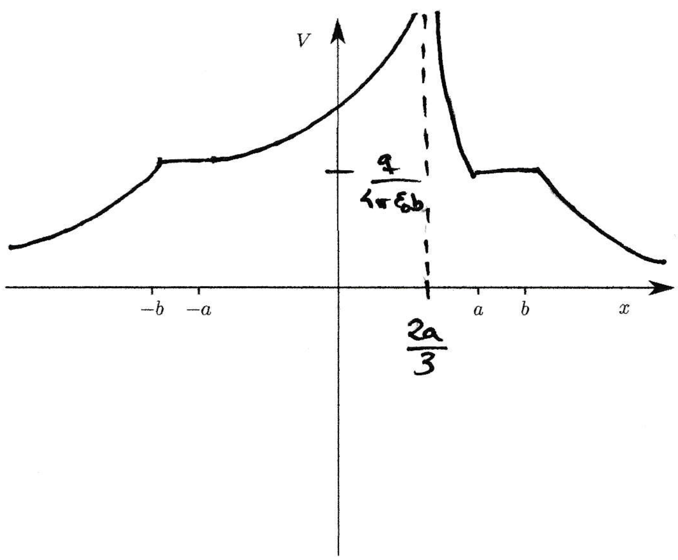


Ath.: Fyrir svæðið $-a < x < a$ skipti máli við stigagjöf að sýna að

$E(-a) < \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ og

$E(a) > \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

Dæmi 4, liður 2. iv)



Dæmi 4, liður 2. v)