Landskeppni í eðlisfræði 2019

Úrslitakeppni

9. mars kl. 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 3 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör. Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi. Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

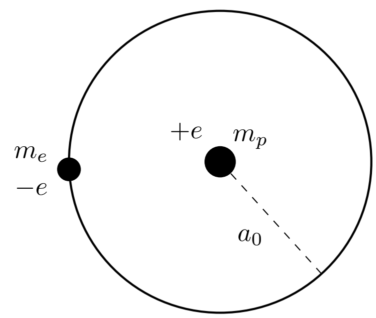
Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Fasti Plancks	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

1 Klassískur líftími vetnisatómsins

Árið 1785 setti Charles-Augustin de Coulomb fram eftirfarandi lögmál um rafkraftinn milli tveggja hlaðinna agna með hleðslu q_1 og q_2 í fjarlægð r frá hvorri annarri:

$$F_k = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

þar sem $k = 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$ er fasti sem nefnist fasti Coulombs. Samkvæmt líkani Bohrs ferðast rafeindir í kringum kjarnann á hringlaga brautum. Í þessu dæmi munum við skoða vetnisatómið. Lítum á eina rafeind á braut um eina róteind. Við munum sýna fram á að þetta klassíska líkan Bohrs geti ekki staðist. Rafeindin hefur hleðslu $-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ og massa $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ á meðan róteindin hefur hleðslu $+e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ og massa $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.



Mynd 1: Líkan Bohrs af vetnisatóminu.

(a) **(0.5 stig)** Sýnið fyrst að áhrifin vegna þyngdarkraftsins

$$F_G = G\frac{m_e m_p}{r^2}, \qquad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$$

milli rafeindarinnar og róteindarinnar séu hverfandi í samanburði við rafkraftinn, það er, finnið $\frac{F_G}{F_k}$.

(b) **(1 stig)** Rafeindin er á hringhreyfingu um róteindina og verður því fyrir miðsóknarkrafti. Finnið hraða rafeindarinnar á braut sinni um róteindina sem fall af r og þekktum föstum.

(c) **(0.2 stig)** Umritið niðurstöðuna í liðnum á undan til þess að finna r sem fall af þekktu föstunum og v.

(d) **(0.3 stig)** Finnið miðsóknarhröðunina, $a_{\text{mið}}$, einungis sem fall af þekktu föstunum og v.

(e) **(0.3 stig)** Finnið miðsóknarhröðunina, $a_{\text{mið}}$, einungis sem fall af þekktu föstunum og r.

Rafhleðsla sem verður fyrir hröðun geislar frá sér orku með aflinu:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{kq^2a^2}{c^3}$$

þar sem k er fasti Coulombs, q er hleðsla agnarinnar, $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ er ljóshraðinn og a er hröðun agnarinnar. Þessi jafna nefnist Larmor formúlan. Samkvæmt Larmor formúlunni tapar rafeindin því orku vegna hröðunarinnar af völdum miðsóknarkraftsins.

(f) **(2.5 stig)** Látum ΔE tákna breytinguna í orku rafeindarinnar eftir að hún hefur ferðast eina umferð í kringum vetniskjarnann og látum K tákna hreyfiorku hennar. Sýnið að:

$$\frac{|\Delta E|}{K} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3$$

(g) **(0.2 stig)** Ritið hægri hlið Larmor formúlunnar:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{ke^2a^2}{c^3}$$

einungis sem fall af r með því að nota niðurstöðuna í (e)-lið.

(h) **(1 stig)** Finnið heildarorku rafeindarinnar einungis sem fall af þekktu föstunum og r.

(i) **(1 stig)** Reiknið $\frac{dE}{dt}$ með því að diffra niðurstöðuna í liðnum á undan með tilliti til t.

[*Ábending:* Þið megið nota keðjuregluna $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt}$]

(j) **(1 stig)** Nota má niðurstöðurnar úr liðum (g) og (i) til þess að fá diffurjöfnu á eftirfarandi formi:

$$\frac{dr}{dt} = -\gamma\frac{1}{r^2}$$

þar sem γ er fasti sem er fall af föstunum k,e,m_e og c. Ákvarðið γ.

(k) **(2 stig)** Geisli vetnisatómsins er $a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m og geisli kjarnans er $b_0 = 0{,}878 \cdot 10^{-15}$ m. Leysið diffurjöfnuna með því að beita aðskilnaði breytistærða og finnið tímann τ sem það tekur rafeindina að falla inn í kjarnann.

Lausn:

(a) Fáum:

$$\frac{F_k}{F_G} = \frac{\frac{ke^2}{r^2}}{\frac{Gm_e m_p}{r^2}} = \frac{ke^2}{Gm_e m_p} = \frac{8{,}99 \cdot 10^9 \cdot (1{,}602 \cdot 10^{-19})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 0.228 \cdot 10^{40}$$

svo $\frac{F_G}{F_k} = 4.39 \cdot 10^{-40}$.

(b) Höfum:

$$k\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r} \implies v = \sqrt{\frac{ke^2}{m_e r}}$$

(c) Fáum:

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{m_e r}} \implies r = \frac{ke^2}{m_e v^2}$$

(d) Fáum:

$$a_{\text{mið}} = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{\frac{ke^2}{m_e v^2}} = \frac{m_e v^4}{ke^2}$$

(e) Fáum:

$$a_{\text{mið}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\frac{ke^2}{m_e r}}{r} = \frac{ke^2}{m_e}\frac{1}{r^2}$$

(f) Fáum:

$$\Delta E \approx P\Delta t$$

þar sem $\Delta t \approx \frac{2\pi r}{v}$ svo við fáum að:

$$\frac{|\Delta E|}{K} = \frac{2}{m_e v^2}\left(\frac{2}{3}\frac{ke^2 a^2}{c^3}\right)\left(\frac{2\pi r}{v}\right) = \frac{8\pi ke^2}{3m_e}\frac{1}{v^3 c^3} \cdot \left(\frac{m_e v^4}{ke^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{ke^2}{m_e v^2}\right) = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3$$

(g) Fáum með því að nýta okkur niðurstöðuna í lið (e) að:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{ke^2 a^2}{c^3} = -\frac{2}{3}\frac{ke^2}{c^3} \cdot \left(\frac{ke^2}{m_e}\frac{1}{r^2}\right)^2 = -\frac{2}{3}\left(\frac{ke^2}{c}\right)^3 \frac{1}{m_e^2}\frac{1}{r^4}$$

(h) Fáum:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{ke^2}{r} = \frac{1}{2}m_e\frac{ke^2}{m_e r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}$$

(i) Fáum:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dr}\left(\frac{-ke^2}{2r}\right)\frac{dr}{dt} = \frac{ke^2}{2r^2}\frac{dr}{dt}$$

(j) Við byrjum á því að ákvarða γ:

$$\frac{ke^2}{2r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3}\left(\frac{ke^2}{c}\right)^3 \frac{1}{m_e^2}\frac{1}{r^4}$$

sem gefur:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3c^3}\left(\frac{ke^2}{m_e}\right)^2 \frac{1}{r^2}$$

svo við ályktum að

$$\gamma = \frac{4}{3c^3}\left(\frac{ke^2}{m_e}\right)^2 = 3{,}17 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

(k) Við leysum diffurjöfnuna með aðskilnaði breytistærða:

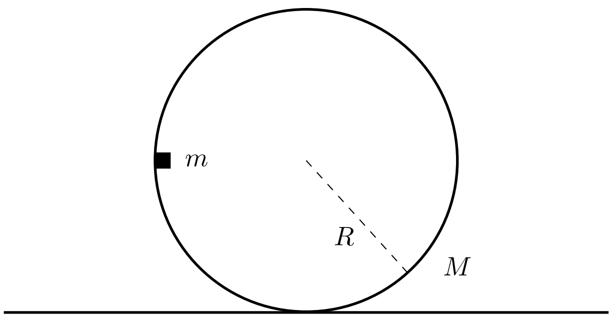
$$\int_{a_0}^{b_0} r^2 dr = -\gamma \int_0^{\tau} dt \implies \frac{1}{3}(b_0^3 - a_0^3) = -\gamma\tau$$

sem gefur okkur því að

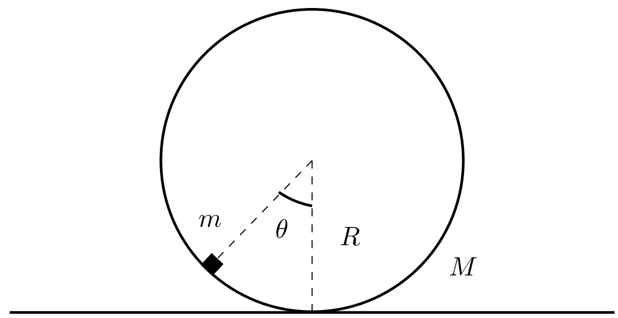
$$\tau = \frac{a_0^3 - b_0^3}{3\gamma} = 1{,}56 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}$$

2 Ögn sem rennur innan á sívaling

Lítilli ögn með massa m er komið fyrir á innra borði sívalnings sem er holur að innan og hefur massa M og geisla R. Sívalningurinn er kyrrstæður í byrjun. Ögninni er sleppt úr kyrrstöðu í hæð R líkt og á mynd 2. Gerum ráð fyrir því að enginn núningskraftur verki milli agnarinnar og sívalningsins. Látum stærð núningskraftinn milli sívalningsins og yfirborðsins sem hann hvílir á vera táknaðan með $F_{\text{nún}}$. Gerum ráð fyrir því að sívalningurinn rúlli án þess að renna. Látum θ vera hornið á milli lóðlínu gegnum miðju sívalningsins og línu frá miðju sívalningsins að ögninni eins og sést á mynd 3. Við táknum stærð þverkraftsins á ögnina með Þ og stærð þverkraftsins á sívalninginn með $Þ_1$.



Mynd 2: Þegar ögninni er sleppt úr hæð R.



Mynd 3: Þegar ögnin hefur runnið niður dálítinn spöl.

(a) **(0.2 stig)** Finnið heildarorku kerfisins einmitt þegar ögninni er sleppt.

(b) **(1 stig)** Látum A tákna hröðun sívalningsins. Skrifið niður kraftajöfnu sívalningsins þegar ögnin myndar hornið θ miðað við lóðlínu. Finnið A sem fall af $m, M, R, Þ, Þ_1, F_{\text{nún}}, \theta$ og þekktum föstum.

(c) **(1 stig)** Látum α tákna hornhröðun sívalningsins. Skrifið niður vægisjöfnu um ás gegnum miðju sívalningsins þegar ögnin myndar hornið θ miðað við lóðlínu. Finnið α sem fall af $m, M, R, Þ, Þ_1, F_{\text{nún}}, \theta$ og þekktum föstum.

(d) **(1 stig)** Látum a_x tákna hröðun agnarinnar samsíða hreyfingarstefnu massamiðju sívalningsins og látum a_y tákna hröðun agnarinnar hornrétt á hreyfingarstefnu masssamiðju sívalningsins. Skrifið niður kraftajöfnu fyrir ögnina og finnið bæði a_x og a_y sem fall af $m, M, R, Þ, Þ_1, F_{\text{nún}}, \theta$ og þekktum föstum.

(e) **(1 stig)** Tengið saman niðurstöðurnar í liðunum þrem hér á undan og sýnið að:

$$2MA = Þ \sin\theta = ma_x$$

(f) **(0.8 stig)** Látum u tákna hraða massamiðju sívalningsins og látum v tákna hraða agnarinnar. Finnið heildarorku kerfisins þegar ögnin er í lægstu stöðu sem fall af m, M, R, v, u og þekktum föstum.

(g) **(1 stig)** Nýtið ykkur niðurstöðuna í lið (e) til að sýna að í lægstu stöðu gildi um hraðana u og v að:

$$2Mu = mv$$

(h) **(2 stig)** Ákvarðið hraðana u og v þegar ögnin er í lægstu stöðu einungis sem fall af m, M, R og g.

(i) **(2 stig)** Finnið þverkraftinn á ögnina frá sívalningnum þegar ögnin er í lægstu stöðu einungis sem fall af m, M og þekktum föstum.

Lausn:

(a) Við höfum:

$$E = mgR$$

(b) Höfum að:

$$\begin{pmatrix} MA \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Þ\sin\theta - F_{\text{nún}} \\ Þ_1 - Mg - Þ\cos\theta \end{pmatrix}$$

svo við ályktum að $A = \frac{1}{M}\left(Þ\sin\theta - F_{\text{nún}}\right)$.

(c) Höfum:

$$I\alpha = F_{\text{nún}}R$$

svo við fáum að:

$$\alpha = \frac{F_{\text{nún}}R}{I}$$

Höfum síðan að $I = MR^2$ svo:

$$\alpha = \frac{F_{\text{nún}}R}{MR^2} = \frac{F_{\text{nún}}}{MR}$$

Getum einnig nýtt ykkur að $\alpha = \frac{A}{R}$ svo:

$$A = \frac{F_{\text{nún}}}{M}$$

(d) Höfum síðan að:

$$\begin{pmatrix} ma_x \\ ma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Þ\sin\theta \\ Þ\cos\theta - mg \end{pmatrix}$$

En þar með höfum við að:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}Þ\sin\theta \\ \frac{1}{m}Þ\cos\theta - g \end{pmatrix}$$

(e) Fáum úr (b)-lið að:

$$MA = Þ\sin\theta - F_{\text{nún}}$$

en úr (c)-lið höfum við að $F_{\text{nún}} = MA$ og úr (d)-lið höfum við að $\sin\theta = ma_x$ svo við höfum sýnt að:

$$MA = ma_x - MA$$

sem gefur því að:

$$2MA = ma_x$$

(f) Þá höfum við:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

þar sem $I = MR^2$ og $\omega = \frac{v}{R}$ svo við fáum að:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + Mu^2$$

(g) Þá tegrum við niðurstöðuna í (e)-lið. Fáum:

$$\int_0^t 2MAdt' = \int_0^t ma_x dt'$$

þ.e.

$$2M\int_0^t \frac{du}{dt}dt = m\int_0^t \frac{dv_x}{dt}dt$$

í lægstu stöðu er $v = v_x$ svo við höfum:

$$2Mu = mv$$

(h) Við leysum síðan jöfnuhneppið:

$$\begin{cases} mgR = \frac{1}{2}mv^2 + Mu^2 \\ 2Mu = mv \end{cases}$$

sem gefur þá að:

$$mgR = \frac{1}{2}m\left(\frac{2M}{m}u\right)^2 + Mu^2 = M\left(1 + \frac{2M}{m}\right)u^2$$

sem gefur því að:

$$u = \sqrt{\frac{mgR}{M(1+\frac{2M}{m})}} = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}$$

en þar með er

$$v = 2\frac{M}{m}u = 2\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}$$

(i) Í viðmiðunarkerfi þar sem sívalingurinn er kyrr er ögnin á hringhreyfingu svo þá gildir að afstæður hraði agnarinnar er gefinn með:

$$w = v + u = \left(2 + \frac{m}{M}\right)\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}$$

en þar með gildir að:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m\frac{w^2}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Þ} - mg \end{pmatrix}$$

en þar með höfum við að:

$$w^2 = \left(2 + \frac{m}{M}\right)^2 \cdot \frac{MgR}{2M+m} = \frac{(2M+m)^2}{M^2} \cdot \frac{MgR}{2M+m} = \frac{(2M+m)\,gR}{M}$$

sem gefur því að:

$$\text{Þ} = mg + m\frac{w^2}{R} = mg + \frac{m}{M}(2M+m)\,g = 3mg\left(1 + \frac{m}{3M}\right)$$

3 Að sigla upp í vindinn

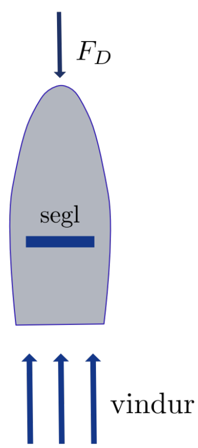
Svanhildur siglingargyðja hefur fengið nóg af kaldri veðráttu Íslands og ætlar að sigla til suðrænni landa. Við munum í þessu dæmi skoða einfalt líkan af seglskútu Svanhildar. Gerum ráð fyrir að seglskútan hafi eðlismassa ρ_b og sé hálfsívalningsskel með innri radíus r og ytri radíus R og af lengd L líkt og á mynd (5).

(a) **(1 stig)** Hver er stærsti farmur, m, sem að Svanhildur getur flutt með sér án þess að skútan sökkvi ef ekki er tekið tillit til massa masturs og segls?

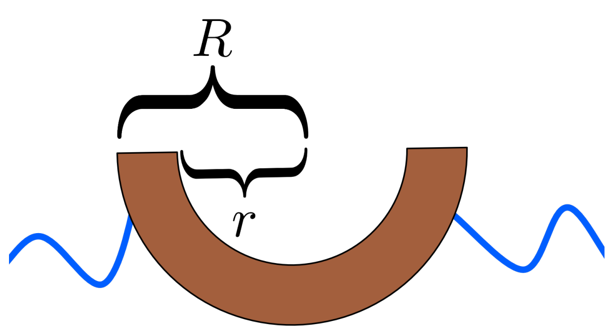
Í viðmiðunarkerfi þar sem sjórinn er kyrr látum við $\vec{w}$ tákna hraða vindsins og $\vec{v}$ tákna hraða skútunnar. Stærðir hraðanna táknum við með w og v. Dragkrafturinn sem verkar á skútuna á móti hreyfingu hennar er gefinn með formúlunni:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho_s C_D A v^2,$$

þar sem ρ_s er eðlismassi sjósins, C_D er dragstuðullin sem er háður seigju vökvans og lögun skútunnar og A er flatarmál ofanvarpsmyndar þess hluta skútunnar sem er í vatninu á plan sem er hornrétt á stefnu skútunnar. Látum S tákna flatarmál seglsins og hunsum sveigju seglsins vegna vindsins. Skútan ferðast einungis í þá átt sem stefni hennar snýr í, það er að segja, hún ferðast ekkert til hliðanna.



Mynd 4: Skútan hennar Svanhildar



Mynd 5: Þverskurður af skútunni.

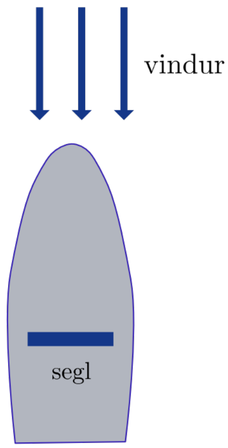
(b) **(0.5 stig)** Látum eðlismassa loftsins vera ρ_l og gerum ráð fyrir að seglið sé hornrétt á vindinn. Sýnið, með því að nota lögmál Bernoullis, að seglkrafturinn, F_S, sem verkar hornrétt á seglið sé gefinn með:

$$F_S = \frac{1}{2}\rho_l S(w-v)^2$$

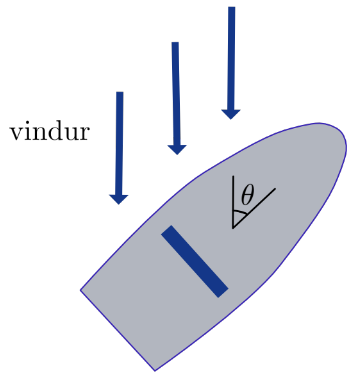
(c) **(2 stig)** Í fyrstu fær Svanhildur góðan meðbyr og siglir beint með vindi. Finnið hámarkshraða skútunnar, $v_{\max}$, þegar skútan siglir beint með vindi með seglið hornrétt í vindinn.

[*Ábending*: Skútan siglir með hámarkshraða þegar að heildarkrafturinn sem verkar á hana er núll.]

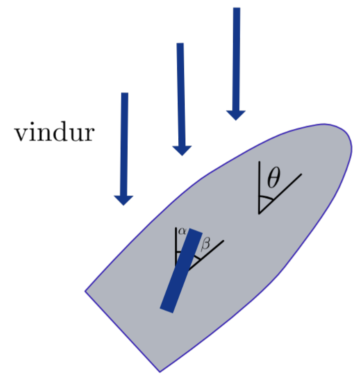
Skjótt skipast veður. Nú fer vindurinn að blása beint á móti stefnu bátsins líkt og á mynd 6. En Svanhildur deyr ekki ráðalaus. Hún byrjar á því að snúa skútu sinni um θ gráður miðað við stefnu vindsins líkt og á mynd 7. Hún snýr síðan segli sínu þannig að seglið myndi hornið α miðað við vindáttina og hornið β miðað við stefnu bátsins líkt og á mynd 8. Takið eftir að þá er $\theta = \alpha + \beta$.



Mynd 6: Skútu siglt beint á móti vindi.



Mynd 7: Skútu snúið um horn θ miðað við vind.



Mynd 8: Segli snúið um horn α miðað við vind.

(d) **(0.2 stig)** Finnið þann þátt af hraða vindsins, $w_\perp$, sem er hornréttur á seglið þegar seglinu er snúið um horn α miðað við mótvindinn.

(e) **(0.3 stig)** Finnið þann þátt af hraða skútunnar, $v_\perp$, sem er hornréttur á seglið þegar skútunni er snúið um horn θ miðað við mótvindinn og seglinu er snúið um horn α miðað við mótvindinn.

(f) **(1.5 stig)** Finnið þann þátt seglkraftsins sem er samsíða stefnu skútunnar þegar afstaða skútu og segls miðað við vind er eins og á mynd 8.

[*Ábending:* Skoðið afstæðan hraða vindsins hornrétt á seglið miðað við hraða bátsins hornrétt á seglið.]

(g) **(2.5 stig)** Sýnið að hámarkshraði seglskútunnar á móti vindi þegar skútan myndar horn θ miðað við stefnu vindsins og segl hennar myndar horn $\alpha < \theta$ réttsælis við vindinn líkt og á mynd 8 sé gefinn með:

$$v(\theta, \beta) = \frac{w \cos(\theta) \sin(\theta - \beta) \sqrt{\sin \beta}}{(\sin \beta)^{3/2} + \sqrt{\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}}}$$

(h) **(1 stig)** Sýnið að fyrir fast β þá sé besta hornið, θ, þannig að hámarkshraði seglskútunnar á móti vindi verði sem mestur, gefinn með:

$$\theta = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}$$

[*Ábending:* Hornafallareglan: $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ gæti komið að gagni.]

(i) **(1 stig)** Nú stagvendir Svanhildur skútu sinni upp í vindinn (þ.e. hún siglir í sikksakk á móti vindinum) og er vitaskuld búin að reikna út allar þessar niðurstöður í hausnum. Með mið af því, snýr hún segli sínu miðað við stefnu bátsins þannig að $\beta = 20°$ eins og á mynd 8. Hversu marga daga er Svanhildur þá að sigla til Grænhöfðaeyja sem eru í 5460 km fjarlægð ef hún siglir á móti vindi með sem mestum hraða alla leiðina? Eðlismassi sjósins er $1020\,\mathrm{kg/m^3}$, eðlismassi loftsins er $1{,}23\,\mathrm{kg/m^3}$, hraði vindsins er $17\,\mathrm{m/s}$, dragstuðull bátsins er 0.04, flatarmál ofanvarpsmyndar bátsins á plan sem er hornrétt stefnu hans er $0{,}500\,\mathrm{m^2}$ og flatarmál seglsins er $50{,}0\,\mathrm{m^2}$.

Lausn:

(a) Við höfum samkvæmt lögmáli Arkímedesar:

$$\left(m + \rho_b \left(\frac{1}{2}\pi \left(R^2 - r^2\right) L\right)\right) g = F_{\text{upp}} = \frac{1}{2}\rho_s \left(\pi R^2 L\right) g$$

sem gefur því að:

$$m = \frac{1}{2}\pi R^2 L \left(\rho_s - \rho_b \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\right)$$

(b) Skoðum afstæðan hraða vindsins miðað við seglið, hann er $w - v$ þar sem að vindurinn þarf að fara hraðar heldur en báturinn til þess að gefa einhvern seglkraft. Afstæður hraði loftsins hinum meginn við seglið er núll og því er þrýstingsmunurinn samkvæmt lögmáli Bernoullis:

$$\frac{1}{2}\rho_l (w - v)^2$$

og því krafturinn:

$$F = \frac{1}{2}\rho_l S (w - v)^2$$

(c) Við höfum þá $F_S = F_D$ sem gefur:

$$\frac{1}{2}\rho_l S (w - v)^2 = \frac{1}{2}\rho_s C_D A v^2$$

sem gefur því að:

$$\left(\frac{w}{v} - 1\right)^2 = \frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}$$

en þar með höfum við að:

$$\frac{w}{v} - 1 = \pm \left(\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}\right)^{1/2}$$

veljum jákvæðu rótina því $\frac{w}{v} > 1$ svo við höfum því að:

$$\frac{w}{v} - 1 = \left(\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}\right)^{1/2}$$

sem gefur að lokum að:

$$v = \frac{w}{1 + \left(\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}\right)^{1/2}}$$

(d) Höfum þá að:

$$w_\perp = w \sin\alpha$$

(e) Höfum þá að:

$$v_{\perp} = v\cos(\frac{\pi}{2} - \beta) = v\sin(\beta)$$

(f) Þar með fæst samkvæmt Bernoulli að seglkrafturinn er gefinn með:

$$F_S = \frac{1}{2}\rho_l S\left(w\sin\alpha - v\sin\beta\right)^2$$

En þennan kraft þarf að liða í stefnu bátsins þar sem að sá þáttur hans sem er hornréttur á stefnu bátsins hefur engin áhrif. Við endum því með kraftinn F_{SB} sem táknar seglkraftinn í stefnu bátsins. Hann er því gefinn með:

$$F_{SB} = \frac{1}{2}\rho_l S\left(w\sin\alpha - v\sin\beta\right)^2\sin\beta$$

(g) Við höfum að hámarkshraðanum er náð þegar $F_{SB} = F_D$ svo við fáum þá að:

$$\frac{1}{2}\rho_l S\left(w\sin\alpha - v\sin\beta\right)^2\sin\beta = \frac{1}{2}\rho_s C_D A v^2$$

Við fáum þá að:

$$\left(\frac{w}{v}\sin\alpha - \sin\beta\right)^2 = \frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S\sin\beta}$$

sem gefur því að:

$$\frac{w}{v}\sin\alpha - \sin\beta = \left(\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S\sin\beta}\right)^{1/2}$$

En þetta gefur okkur því að:

$$v = \frac{w\sin\alpha}{\sin\beta + \left(\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S\sin\beta}\right)^{1/2}} = \frac{w\sin\alpha\sqrt{\sin\beta}}{(\sin\beta)^{3/2} + \left(\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}\right)^{1/2}}$$

En við erum beðin um að liða hraðann v í stefnuna á móti vindi svo að við fáum að lokum að:

$$v(\theta,\beta) = \frac{w\sin\alpha\cos\theta\sqrt{\sin\beta}}{(\sin\beta)^{3/2} + \left(\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}\right)^{1/2}} = \frac{w\cos(\theta)\sin(\theta-\beta)\sqrt{\sin\beta}}{(\sin\beta)^{3/2} + \sqrt{\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}}}$$

þar sem við höfum nýtt okkur að $\alpha = \theta - \beta$ til þess að fá síðasta skrefið.

(h) Við athugum að:

$$\frac{dv(\theta,\beta)}{d\theta} = \frac{w\sqrt{\sin\beta}}{(\sin\beta)^{3/2} + \sqrt{\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}}}\Big(\cos(\theta-\beta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta-\beta)\Big) =$$

Athugum að $\frac{dv(\theta,\beta)}{d\theta} = 0$ ef:

$$\Big(\cos(\theta-\beta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta-\beta)\Big) = \cos(2\theta-\beta) = 0$$

en það gefur einmitt að $2\theta - \beta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ þar sem $n \in Z$. En það gefur því einu eðlisfræðilegu lausnina:

$$\theta = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

(i) Þá fæst að $\theta = \frac{\beta}{2} + 45° = 55°$ samkvæmt liðnum á undan og ef $\ell = 5460\,\text{km}$ þá er $vt = \ell$ þannig að:

$$t = \frac{\ell}{v(\theta,\beta)} = \frac{\ell\left((\sin\beta)^{3/2} + \sqrt{\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}}\right)}{w\cos(\theta)\sin(\theta-\beta)\sqrt{\sin\beta}} = \frac{5460\cdot 10^3}{\cos(55)\cdot 7.35} = 1{,}28\cdot 10^6\,\text{s} = 14{,}8\,\text{dagar}$$