Landskeppni í eðlisfræði 2019

Úrslitakeppni

9. mars kl. 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 3 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör. Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi. Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

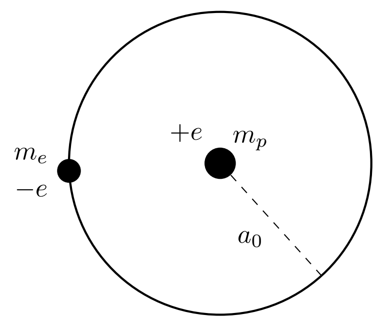
Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Fasti Plancks	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

1 Klassískur líftími vetnisatómsins

Árið 1785 setti Charles-Augustin de Coulomb fram eftirfarandi lögmál um rafkraftinn milli tveggja hlaðinna agna með hleðslu q_1 og q_2 í fjarlægð r frá hvorri annarri:

$$F_k = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

þar sem $k = 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$ er fasti sem nefnist fasti Coulombs. Samkvæmt líkani Bohrs ferðast rafeindir í kringum kjarnann á hringlaga brautum. Í þessu dæmi munum við skoða vetnisatómið. Lítum á eina rafeind á braut um eina róteind. Við munum sýna fram á að þetta klassíska líkan Bohrs geti ekki staðist. Rafeindin hefur hleðslu $-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ og massa $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ á meðan róteindin hefur hleðslu $+e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ og massa $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.



Mynd 1: Líkan Bohrs af vetnisatóminu.

(a) **(0.5 stig)** Sýnið fyrst að áhrifin vegna þyngdarkraftsins

$$F_G = G\frac{m_e m_p}{r^2}, \qquad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$$

milli rafeindarinnar og róteindarinnar séu hverfandi í samanburði við rafkraftinn, það er, finnið $\frac{F_G}{F_k}$.

(b) **(1 stig)** Rafeindin er á hringhreyfingu um róteindina og verður því fyrir miðsóknarkrafti. Finnið hraða rafeindarinnar á braut sinni um róteindina sem fall af r og þekktum föstum.

(c) **(0.2 stig)** Umritið niðurstöðuna í liðnum á undan til þess að finna r sem fall af þekktu föstunum og v.

(d) **(0.3 stig)** Finnið miðsóknarhröðunina, $a_{\text{mið}}$, einungis sem fall af þekktu föstunum og v.

(e) **(0.3 stig)** Finnið miðsóknarhröðunina, $a_{\text{mið}}$, einungis sem fall af þekktu föstunum og r.

Rafhleðsla sem verður fyrir hröðun geislar frá sér orku með aflinu:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{kq^2a^2}{c^3}$$

þar sem k er fasti Coulombs, q er hleðsla agnarinnar, $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ er ljóshraðinn og a er hröðun agnarinnar. Þessi jafna nefnist Larmor formúlan. Samkvæmt Larmor formúlunni tapar rafeindin því orku vegna hröðunarinnar af völdum miðsóknarkraftsins.

(f) **(2.5 stig)** Látum ΔE tákna breytinguna í orku rafeindarinnar eftir að hún hefur ferðast eina umferð í kringum vetniskjarnann og látum K tákna hreyfiorku hennar. Sýnið að:

$$\frac{|\Delta E|}{K} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3$$

(g) **(0.2 stig)** Ritið hægri hlið Larmor formúlunnar:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{ke^2a^2}{c^3}$$

einungis sem fall af r með því að nota niðurstöðuna í (e)-lið.

(h) **(1 stig)** Finnið heildarorku rafeindarinnar einungis sem fall af þekktu föstunum og r.

(i) **(1 stig)** Reiknið $\frac{dE}{dt}$ með því að diffra niðurstöðuna í liðnum á undan með tilliti til t.

[*Ábending:* Þið megið nota keðjuregluna $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt}$]

(j) **(1 stig)** Nota má niðurstöðurnar úr liðum (g) og (i) til þess að fá diffurjöfnu á eftirfarandi formi:

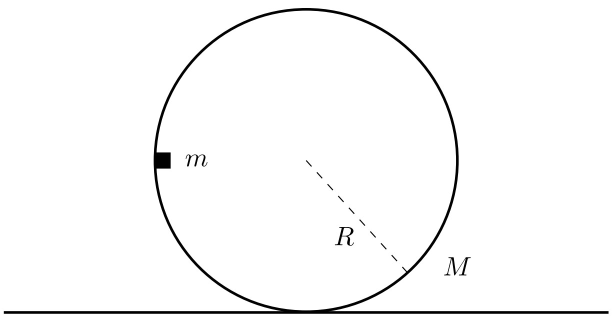
$$\frac{dr}{dt} = -\gamma\frac{1}{r^2}$$

þar sem γ er fasti sem er fall af föstunum k,e,m_e og c. Ákvarðið γ.

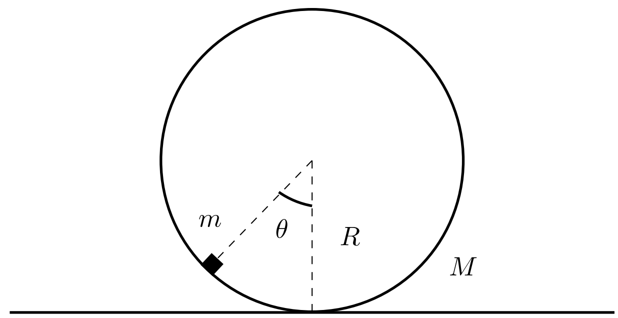
(k) **(2 stig)** Geisli vetnisatómsins er $a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$ og geisli kjarnans er $b_0 = 0{,}878 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$. Leysið diffurjöfnuna með því að beita aðskilnaði breytistærða og finnið tímann τ sem það tekur rafeindina að falla inn í kjarnann.

2 Ögn sem rennur innan á sívaling

Lítilli ögn með massa m er komið fyrir á innra borði sívalnings sem er holur að innan og hefur massa M og geisla R. Sívalningurinn er kyrrstæður í byrjun. Ögninni er sleppt úr kyrrstöðu í hæð R líkt og á mynd 2. Gerum ráð fyrir því að enginn núningskraftur verki milli agnarinnar og sívalningsins. Látum stærð núningskraftinn milli sívalningsins og yfirborðsins sem hann hvílir á vera táknaðan með $F_{\text{nún}}$. Gerum ráð fyrir því að sívalningurinn rúlli án þess að renna. Látum θ vera hornið á milli lóðlínu gegnum miðju sívalningsins og línu frá miðju sívalningsins að ögninni eins og sést á mynd 3. Við táknum stærð þverkraftsins á ögnina með Þ og stærð þverkraftsins á sívalninginn með $Þ_1$.



Mynd 2: Þegar ögninni er sleppt úr hæð R.



Mynd 3: Þegar ögnin hefur runnið niður dálítinn spöl.

(a) **(0.2 stig)** Finnið heildarorku kerfisins einmitt þegar ögninni er sleppt.

(b) **(1 stig)** Látum A tákna hröðun sívalningsins. Skrifið niður kraftajöfnu sívalningsins þegar ögnin myndar hornið θ miðað við lóðlínu. Finnið A sem fall af $m, M, R, Þ, Þ_1, F_{\text{nún}}, \theta$ og þekktum föstum.

(c) **(1 stig)** Látum α tákna hornhröðun sívalningsins. Skrifið niður vægisjöfnu um ás gegnum miðju sívalningsins þegar ögnin myndar hornið θ miðað við lóðlínu. Finnið α sem fall af $m, M, R, Þ, Þ_1, F_{\text{nún}}, \theta$ og þekktum föstum.

(d) **(1 stig)** Látum a_x tákna hröðun agnarinnar samsíða hreyfingarstefnu massamiðju sívalningsins og látum a_y tákna hröðun agnarinnar hornrétt á hreyfingarstefnu masssamiðju sívalningsins. Skrifið niður kraftajöfnu fyrir ögnina og finnið bæði a_x og a_y sem fall af $m, M, R, Þ, Þ_1, F_{\text{nún}}, \theta$ og þekktum föstum.

(e) **(1 stig)** Tengið saman niðurstöðurnar í liðunum þrem hér á undan og sýnið að:

$$2MA = Þ \sin\theta = ma_x$$

(f) **(0.8 stig)** Látum u tákna hraða massamiðju sívalningsins og látum v tákna hraða agnarinnar. Finnið heildarorku kerfisins þegar ögnin er í lægstu stöðu sem fall af m, M, R, v, u og þekktum föstum.

(g) **(1 stig)** Nýtið ykkur niðurstöðuna í lið (e) til að sýna að í lægstu stöðu gildi um hraðana u og v að:

$$2Mu = mv$$

(h) **(2 stig)** Ákvarðið hraðana u og v þegar ögnin er í lægstu stöðu einungis sem fall af m, M, R og g.

(i) **(2 stig)** Finnið þverkraftinn á ögnina frá sívalningnum þegar ögnin er í lægstu stöðu.

3 Að sigla upp í vindinn

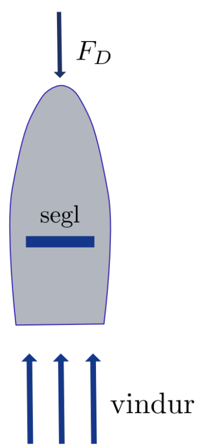
Svanhildur siglingargyðja hefur fengið nóg af kaldri veðráttu Íslands og ætlar að sigla til suðrænni landa. Við munum í þessu dæmi skoða einfalt líkan af seglskútu Svanhildar. Gerum ráð fyrir að seglskútan hafi eðlismassa ρ_b og sé hálfsívalningsskel með innri radíus r og ytri radíus R og af lengd L líkt og á mynd 5.

(a) **(1 stig)** Hver er stærsti farmur, m, sem að Svanhildur getur flutt með sér án þess að skútan sökkvi ef ekki er tekið tillit til massa masturs og segls?

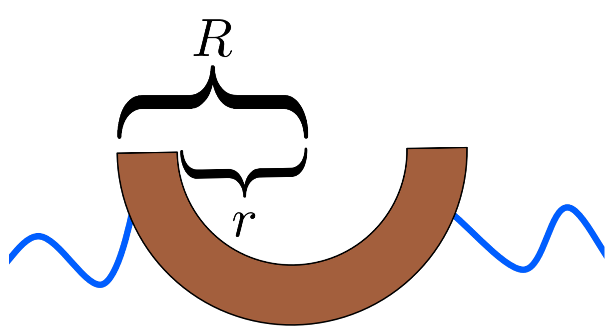
Í viðmiðunarkerfi þar sem sjórinn er kyrr látum við $\vec{w}$ tákna hraða vindsins og $\vec{v}$ tákna hraða skútunnar. Stærðir hraðanna táknum við með w og v. Dragkrafturinn sem verkar á skútuna á móti hreyfingu hennar er gefinn með formúlunni:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho_s C_D A v^2,$$

þar sem ρ_s er eðlismassi sjósins, C_D er dragstuðullin sem er háður seigju vökvans og lögun skútunnar og A er flatarmál ofanvarpsmyndar þess hluta skútunnar sem er í vatninu á plan sem er hornrétt á stefnu skútunnar. Látum S tákna flatarmál seglsins og hunsum sveigju seglsins vegna vindsins. Skútan ferðast einungis í þá átt sem stefni hennar snýr í, það er að segja, hún ferðast ekkert til hliðanna.



Mynd 4: Skútan hennar Svanhildar



Mynd 5: Þverskurður af skútunni.

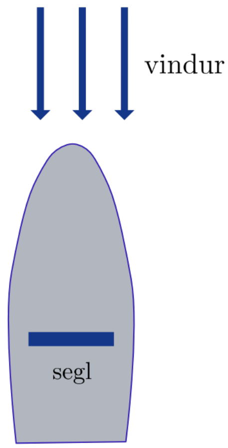
(b) **(0.5 stig)** Látum eðlismassa loftsins vera ρ_l og gerum ráð fyrir að seglið sé hornrétt á vindinn. Sýnið, með því að nota lögmál Bernoullis, að seglkrafturinn, F_S, sem verkar hornrétt á seglið sé gefinn með:

$$F_S = \frac{1}{2}\rho_l S(w - v)^2$$

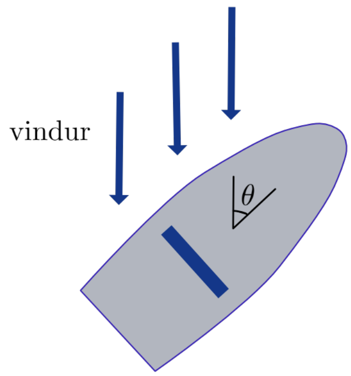
(c) **(2 stig)** Í fyrstu fær Svanhildur góðan meðbyr og siglir beint með vindi. Finnið hámarkshraða skútunnar, $v_{\max}$, þegar skútan siglir beint með vindi með seglið hornrétt í vindinn.

[*Ábending*: Skútan siglir með hámarkshraða þegar að heildarkrafturinn sem verkar á hana er núll.]

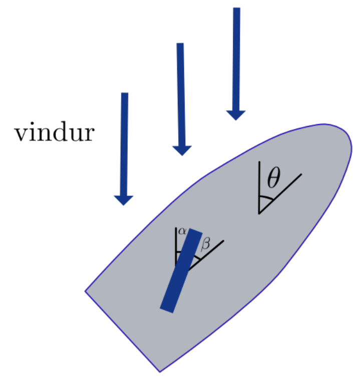
Skjótt skipast veður. Nú fer vindurinn að blása beint á móti stefnu bátsins líkt og á mynd 6. En Svanhildur deyr ekki ráðalaus. Hún byrjar á því að snúa skútu sinni um θ gráður miðað við stefnu vindsins líkt og á mynd 7. Hún snýr síðan segli sínu þannig að seglið myndi hornið α miðað við vindáttina og hornið β miðað við stefnu bátsins líkt og á mynd 8. Takið eftir að þá er $\theta = \alpha + \beta$.



Mynd 6: Skútu siglt beint á móti vindi.



Mynd 7: Skútu snúið um horn θ miðað við vind.



Mynd 8: Segli snúið um horn α miðað við vind.

(d) **(0.2 stig)** Finnið þann þátt af hraða vindsins, $w_\perp$, sem er hornréttur á seglið þegar seglinu er snúið um horn α miðað við mótvindinn.

(e) **(0.3 stig)** Finnið þann þátt af hraða skútunnar, $v_\perp$, sem er hornréttur á seglið þegar skútunni er snúið um horn θ miðað við mótvindinn og seglinu er snúið um horn α miðað við mótvindinn.

(f) **(1.5 stig)** Finnið þann þátt seglkraftsins sem er samsíða stefnu skútunnar þegar afstaða skútu og segls miðað við vind er eins og á mynd 8.

[*Ábending:* Skoðið afstæðan hraða vindsins hornrétt á seglið miðað við hraða bátsins hornrétt á seglið.]

(g) **(2.5 stig)** Sýnið að hámarkshraði seglskútunnar á móti vindi þegar skútan myndar horn θ miðað við stefnu vindsins og segl hennar myndar horn $\beta < \theta$ miðað við stefnu bátsins (sjá mynd 8) sé gefinn með:

$$v(\theta, \beta) = \frac{w \cos(\theta) \sin(\theta - \beta) \sqrt{\sin \beta}}{(\sin \beta)^{3/2} + \sqrt{\frac{\rho_s C_D A}{\rho_l S}}}$$

(h) **(1 stig)** Sýnið að fyrir fast β þá sé besta hornið, θ, þannig að hámarkshraði seglskútunnar á móti vindi verði sem mestur, gefinn með:

$$\theta = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}$$

[*Ábending:* Hornafallareglan: $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ gæti komið að gagni.]

(i) **(1 stig)** Nú stagvendir Svanhildur skútu sinni upp í vindinn (þ.e. hún siglir í sikksakk á móti vindinum) og er vitaskuld búin að reikna út allar þessar niðurstöður í hausnum. Með mið af því, snýr hún segli sínu miðað við stefnu bátsins þannig að $\beta = 20°$ eins og á mynd 8. Hversu marga daga er Svanhildur þá að sigla til Grænhöfðaeyja sem eru í 5460 km fjarlægð ef hún siglir á móti vindi með sem mestum hraða alla leiðina? Eðlismassi sjósins er $1020\,\mathrm{kg/m^3}$, eðlismassi loftsins er $1{,}23\,\mathrm{kg/m^3}$, hraði vindsins er $17\,\mathrm{m/s}$, dragstuðull bátsins er 0.04, flatarmál ofanvarpsmyndar bátsins á plan sem er hornrétt stefnu hans er $0{,}500\,\mathrm{m^2}$ og flatarmál seglsins er $50{,}0\,\mathrm{m^2}$.